MAT 121 : Cálculo Diferencial e Integral II

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Informações gerais

- **Prof.:** Sylvain Bonnot
- **Email:** sylvain@ime.usp.br
- **Minha sala:** IME-USP, 151-A (Bloco A)
- **Site:** ver o link para MAT 121 na pagina
  `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
  Nessa página: as notas de aulas, informações gerais, listas de exercícios (com soluções...), etc...

- **Monitoria:** aguardando para ver se tem um...
- **Avaliação:** mais detalhes depois, sobre as provas (local e horário, etc...)

Programa resumido

Objetivo

Uma continuação de MAT 111 (Cálculo I), com um aprofundamento da teoria de Integral de Riemann. Depois trataremos do cálculo diferencial de funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *(isto é, curvas), e mais importante: funções reais de várias variáveis:* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Integral definida e Aplicações. Integrais impróprias.
- Curvas no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Representação paramétrica. Comprimento de curva
- Conjuntos abertos, fechados, conexos por poligonais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
- Funções de duas ou mais variáveis; limites, continuidade, diferenciabilidade. Gradiente.
- Regra da cadeia. Teorema do valor médio.
- Derivadas de ordem superior. Teorema de Schwarz.
- Fórmula de Taylor. Máximos e mínimos

Observação 1: ≤ 1850 do ponto de vista da matemática... mas as aplicações são bem mais recentes...

Bibliografia

- J. Stewart. CÁLCULO, volume I,e vol. II.
- Guidorizzi, Um curso de Cálculo, vol.I e II, 5a. ed., LTC, 2002.
- G.F. Simmons, CÁLCULO COM GEOMETRIA ANALITICA, vol. I, Mc.Graw-Hill, 1987.
- M. Spivak, CALCULUS, Benjamin, 1967 (ok, tem edições mais recentes...).

- Qualquer livro que parece ajudar,
- Notas do web,
- Aulas do youtube, artigos da wikipedia,
- **Minhas notas de aulas, no meu site...**
- Um site que pode ajudar: `http://symbolab.com/solver`

Exemplo de uso do computador

Solution

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx = 4\ln(x-3) - \ln(x+2) + C$$

« Hide Steps

Steps

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx$$

Take the partial fraction of $\frac{3x+11}{x^2-x-6}$

$$= \int \frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+2}dx$$

Apply the Sum Rule : $\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$$= \int \frac{4}{x-3}dx - \int \frac{1}{x+2}dx$$

$$\int \frac{4}{x-3}dx = 4\ln(x-3)$$

Show Steps

$$\int \frac{1}{x+2}dx = \ln(x+2)$$

Show Steps

$$= 4\ln(x-3) - \ln(x+2)$$

Exemplos de uso de integrais

Modelos: descrever uma situação complexa com uma função matemática (util para fazer previsões por exemplo).

1. **Tsunami:** depois de um terremoto, a velocidade de um tsunami é dada por $v = 11.24\sqrt{p}$ (em quilômetros por hora), onde p é a profundidade do mar. No Pacifico, onde a profundidade media é de 4500 metros, qual é a velocidade de um tsunami? (754 km/h)

Pergunta: quanto tempo antes da chegada do tsunami?

$$\text{Resposta:} t = \int_0^x \frac{1}{v(u)} du$$

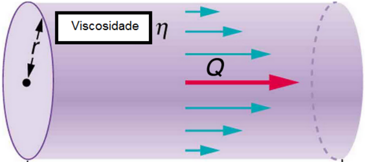
Mais um exemplo:

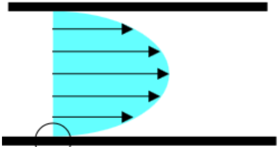
Lei de Poiseuille : para o fluxo de um líquido viscoso através de um tubo de cilíndrico de raio R (examplo: fluxo do sangue numa veia). **Velocidade:** r á a distância até o centro da veia, R é o raio da veia, V a velocidade, e p, L, v são constantes aqui:

$$V = \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2)$$

Utilização de uma integral para calcular o fluxo total: (isto, é, qual é a quantidade de sangue que vai atraversar a veia, por segunda):

$$\boxed{\text{Fluxo total } = \int_0^R 2\pi \frac{p}{4Lv}(R^2 - r^2) r\, dr}$$





Na Física

Principio geral: muitas vezes, uma lei pode ter uma forma diferencial e uma forma integral.

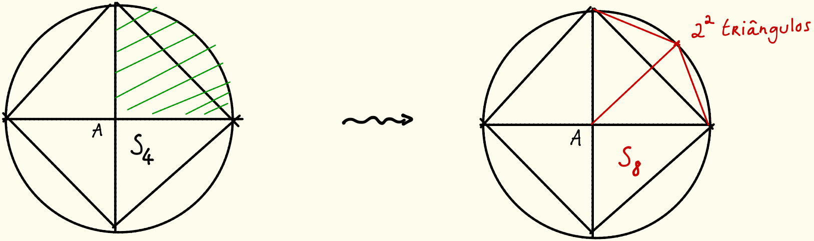
- **Exemplo 1:** $mx'' = -kx$ (Lei de Newton, movimento de uma mola) $\Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = constante$
- **Lei de Gauss, forma diferencial:**

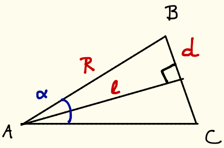
$$\text{Forma diferencial:} \nabla.\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- **Lei de Gauss, forma integral:**

$$\iint \mathbf{E}.\mathbf{dA} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Introdução: Integrais e subdivisões





Temos: Area (Triângulo ABC) $= d \cdot \ell = \left(R \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(R\cos\frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{R^2}{2}\cdot 2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

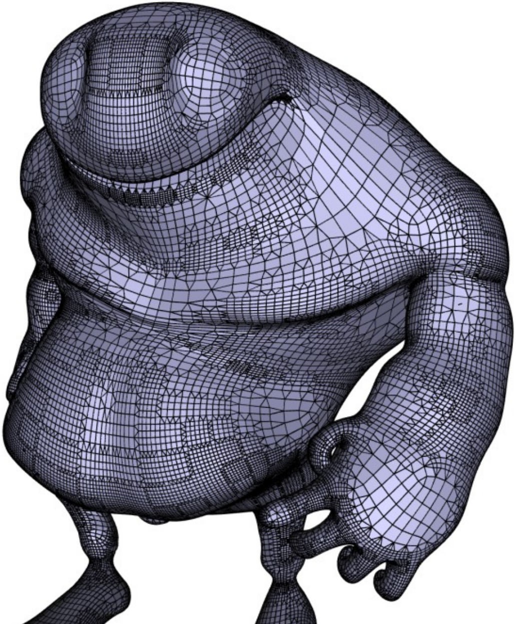
$$= \frac{R^2}{2}\cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Depois de n etapas: temos 2^n triângulos, com angulo $\hat{A} = \frac{\pi/2}{2^n}$

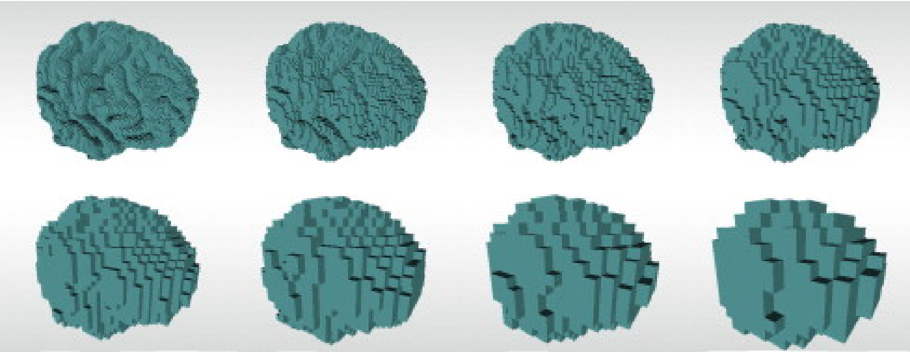
Soma das áreas dos triângulos $= 2^n \cdot \frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi/2}{2^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^n}{\pi/2}\cdot\frac{R^2}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi/2}{2^n}$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}\cdot\frac{R^2}{2}\cdot 1 = \frac{\pi R^2}{4}$$

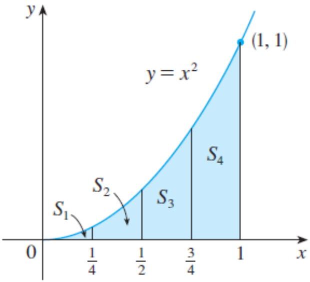
Subdivisões

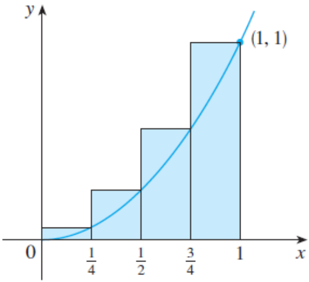


Subdivisões: ressonância magnética



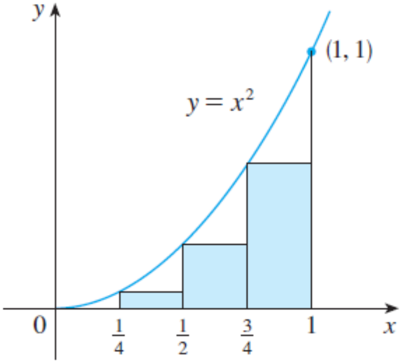
Ideia: como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$? ("dividir e aproximar")



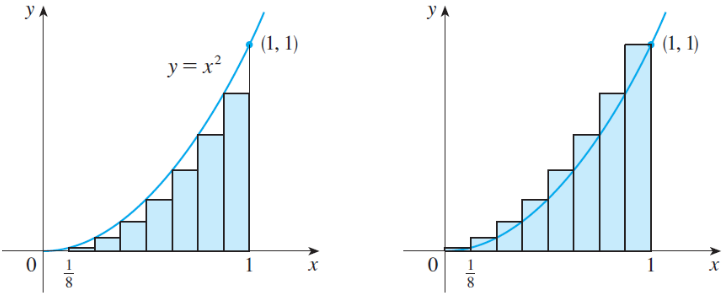


Aproximar com retângulos: obter uma estimativa superior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $(1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2, (4/4)^2$.

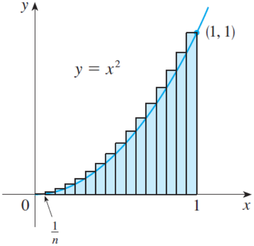
Aproximar com retângulos: obter uma estimativa inferior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $0, (1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2$.



Aproximar com 8 retângulos: estimativa inferior e superior da área: usando extremos esquerdos e direitos dos intervalos



Tomando o limite: vamos dividir $[0,1]$ em n intervalos iguais, construir retângulos usando os extremos direitos, calcular a soma das áreas dos n retângulos e fazer $n \to \infty$.



$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)
\end{aligned}
$$

Somas uteis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Prova das 3 formulas

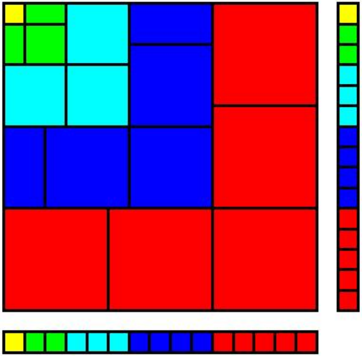
Formula 1: escrever

$$2S = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 2 + 1)$$

$$= (1 + n) + (2 + (n-1)) + \ldots + ((n-1) + 2) + (n+1) = n.(n+1)$$

Formula 2: indução!

Formula 3: prova geometrica:



Integral definida: a integral de Riemann

Definição

Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Podemos dividir $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

Teorema

Se f é continua em $[a, b]$ ou tem um número finito de descontinuidades, então a integral de f de a para b existe.

Vocabulario: $f(x)$=integrando, a, b são os limites de integração (inferior e superior).

Definição

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$ é chamada uma "soma de Riemann"

Exemplos

Exercício

Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x, [1,5]$$

Exercício

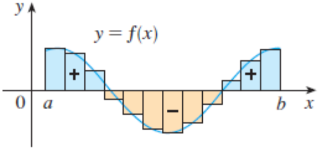
Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

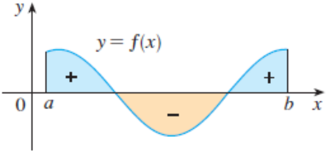
Exercício

Calcule $\int_1^2 x^3 dx$

Propriedades da integral

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)





Teorema

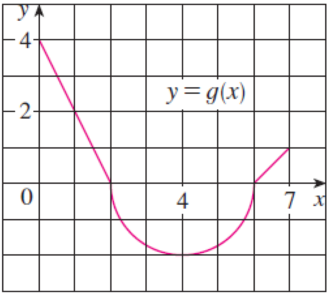
1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Exemplos

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicircuo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Mais exemplos

Exercício

Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$

Mais propriedades da integral

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,dx = 0}$$

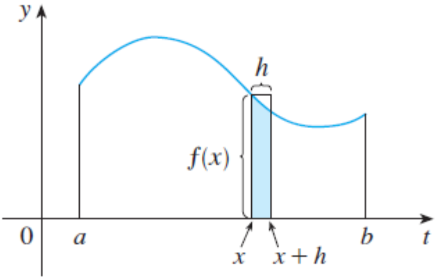
1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a),$ onde c é constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

Teorema fundamental do cálculo



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo

$$
\begin{aligned}
g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt\right) - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^{\pi} \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Praticar: calcule as derivadas

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{\sin x}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t\, dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1 + 2v)\, dv$