MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 8/ Quarta 26/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 7

1. Informações gerais:
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
   - **Monitoria:** quarta-feira, 14:00 as 16:00, na sala "Lilás" do predio dos "Queijinhos".
   - **Monitoria dia 02/04/2014:** eu vou dar essa monitoria, das 15:00 as 16:00.

---

2. **Limites e desigualdades:** teorema do confronto
3. **Limites e funções compostas**: mudança de variavel.
4. **Limites e funções trigonometricas:**

Exercício (Exemplo)

Encontrar $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2(3t)}{t}$

Limites no infinito e limites infinitos

1. **Limites no infinito:**

Definição

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa: "eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente perto de L, tomando x suficientemente grande."*

Exemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

3. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

15. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x-2}{2x+1}$

16. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^2}{x^3-x+1}$

17. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{x^2+1}$

18. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4x^3+6x^2-2}{2x^3-4x+5}$

19. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\sqrt{t}+t^2}{2t-t^2}$

20. $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{t-t\sqrt{t}}{2t^{3/2}+3t-5}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(2x^2+1)^2}{(x-1)^2(x^2+x)}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4+1}}$

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

25. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

26. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^2+x}{x^3-x+2}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} (e^{-x}+2\cos 3x)$

31. $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^4+x^5)$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1+x^6}{x^4+1}$

Limites infinitos

Definição (Limites do tipo $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$)

Suponhamos que exista a tal que $]a, \infty) \subset Dom(f)$. *Definimos:*

1. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *significa:*

   $$\text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe um } \delta > 0 \text{ com } \delta > a \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *significa:*

   $$\text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ com } \delta > a \text{ tal que } x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon.$$

Definição

Sejam $p \in \mathbb{R}$ *e suponhamos que exista b tal que* $]p, b[\subset Dom(f)$, *então:*
$\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$ *significa:*

$$\text{para cada } \epsilon > 0 \text{ existe } \delta > 0 \text{ com } p + \delta < b \text{ tal que } p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon.$$

Limits no ∞ de polinomiais e frações racionais

Exercício

$\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 7x - 15.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 + 7x - 15.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^2+8x+1}.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^4+8x+1}.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{x^5+3x^2-1}.$

Mais limites no infinito de frações racionais

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

21. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

22. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

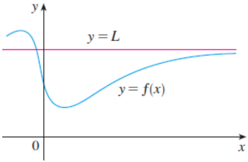
Assíntotas horizontais

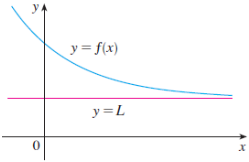
Assíntota horizontal:

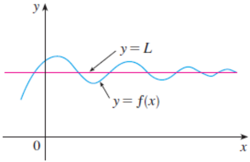
Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$







Assíntotas verticais

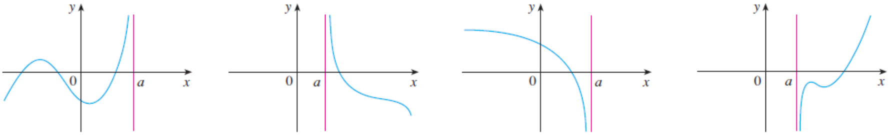
Assíntota vertical:

Definição

A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Exercício

Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2} \qquad y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \qquad y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} \qquad y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Variação: limites de frações com expoentes racionais

Exercício

23. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{8x^2-3}{2x^2+x}}$

24. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+x-1}{8x^2-3}\right)^{1/3}$

25. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1-x^3}{x^2+7x}\right)^5$

26. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2-5x}{x^3+x-2}}$

27. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

28. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

29. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

30. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

31. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

32. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

33. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

34. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

35. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-3}{\sqrt{4x^2+25}}$

36. $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{4-3x^3}{\sqrt{x^6+9}}$

Como trabalhar com limites infinitos: somas e produtos

Somas:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
4. $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

1. $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
3. $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
4. $L.(+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
5. $L.(+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
6. $L.(-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
7. $L.(-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Exemplos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$$

Teorema

Suponha que $\lim_{x\to p^+} = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$*. Então:*

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer numero racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

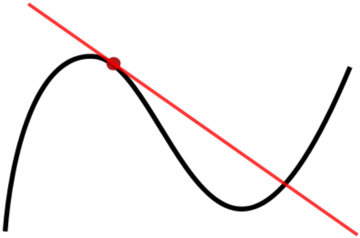
$\lim_{x\to 2^-} \frac{-4}{x+2}$

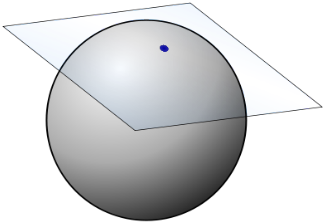
Exercício

$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$ e $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$

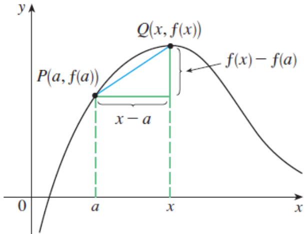
Tangentes

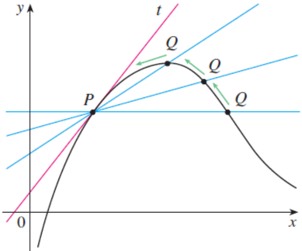
Ideia: "tangente", do latim *tangere* = tocar.





Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:





Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ *em um ponto* $P(a,f(a))$ *é a reta passando pelo ponto* P *e com inclinação*

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ *no ponto* $(1,1)$.

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, *em qualquer ponto* P *da curva.*

Derivada

Definição

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3,2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$

Interpretações da derivada

Velocidade: A variavel t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

Exemplo: queda livre, sem velocidade initial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: ″me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz″.

Interpretação da derivada

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Derivadas na Química

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

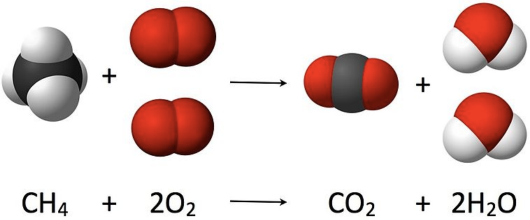
$$M = \frac{n}{V},$$

onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12". Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^2 3$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro"). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Equação química: uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \rightarrow (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)



Metano + oxigénio → dióxido de carbono + agua + muito calor

Reações

Concentrações:dado $A+B \to C$, $[A],[B],[C]$ são funções do tempo t. A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1,t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:

$$aA+bB \to pP+qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v=-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt}=-\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt}=\frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt}=\frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r=k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Química e equações diferenciais

Exemplo:$aA \to Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ *e* $f(t) = 0$ *para todos t implica f constante). (Resposta:* $[A] = [A]_0.e^{-akt}$*)*

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$

$f(x) = mx + b$

$f(t) = 5t - 9t^2$

$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$

$f(x) = x^2 - 2x^3$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$g(x) = \sqrt{9 - x}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$f(x) = x^{3/2}$

$f(x) = x^4$