MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 6/ Quarta 19/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 5

1. Informações gerais:
   - **Email:** sylvain@ime.usp.br
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

---

2. **Leis do limite**
3. **Continuidade**

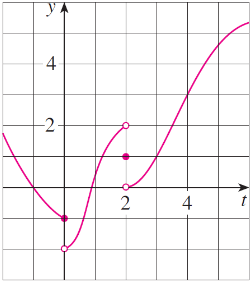
Teorema

Toda função polinomial é continua. Toda função racional f é continua no seu domínio.

4. **Varias tecnicas:** fatorar, simplificar, rationalizar (ex: $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+t}-1}{t}$).

Limites laterais: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

Lido como: "o limite esquerdo de $f(x)$ quando x tende a a. Também: o limite de $f(x)$ quando x tende a a pela esquerda.



Exercício

Escrever a definição do limite esquerdo e direito.

Observação

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Limites laterais: exemplos

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ *onde* $f(x) = x^2$ *se* $x \leq 1$, $e = 2x - 1$ *se* $x > 1$.

Exercício

$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$.

Exercício

A afirmação seguinte é verdadeira ou falsa?
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) \Rightarrow f$ *continua.*

Limites e desigualdades

Teorema

Se $f(x) \leq g(x)$ *quando* x *está proximo de* a *(exceto possivelmente em* a*), e os limites de* f *e* g *existem quando* x *tende a* a*, então*

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$$

Desigualdade estrita: cuidado, podemos ter $f(x) < g(x)$ mas $L_1 = L_2$!

Teorema (do Confronto, ou Teorema do Sanduíche)

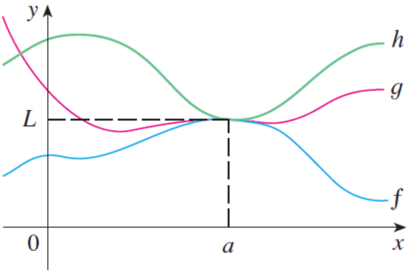
Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *quando* x *está proximo de* a *(exceto possivelmente em* a*), e*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$$

enão:

$$\lim_{x \to a} g(x) = L$$

Limites e desigualdades II:

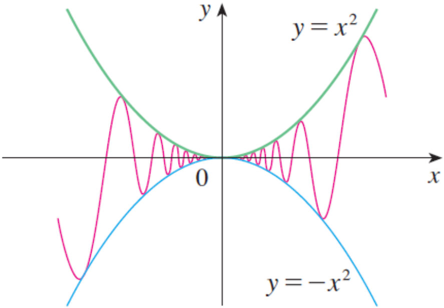


Exercício

Mostrar $\lim_{x\to 0} x^2 . \cos^{17}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$

Exercício

Mostrar $\lim_{x\to 0} x^2 . g(x) = 0$*, onde* $g(x)$ *é qualquer função limitada.*



Exercício

Mostrar $\lim_{x\to 0} x^2.\cos(\frac{1}{x}) = 0$.

Exercício

1. $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ *não existe.*
2. *Mostrar* $\lim_{x\to 0} \sqrt{x^3 + x^2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{x} = 0$.

Limites e funções compostas

Teorema

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se $\lim_{x\to p} f(x) = a$ e g contínua em a, então:

$$\lim_{x\to p} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Teorema (Caso mais utilizado)

Sejam f e g duas funções tais que $Im(f) \subset Dom(g)$. Se f for contínua em p e g contínua em $f(p)$, então a composta $h(x) = g(f(x))$ será contínua em p

Exercício

Calcule

1. $\lim_{x\to -1} \sqrt[3]{\frac{x^3+1}{x+1}}$
2. $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$ *(pode rationalizar ou fazer uma "mudança de variavel")*

Limites e funções compostas: "mudança de variavel"

Situação: suponhamos g contínua em a, e

$$g(u) \xrightarrow[u \to a]{} g(a) \text{ e também } f(x) \xrightarrow[x \to p]{} a$$

então

$$F(x) = g(f(x)) \xrightarrow[x \to p]{} g(a)$$

Exercício

Seja f definida em $\mathbb{R}$. Suponha que $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$. *Calcule*

1. $\lim_{x \to 0} \frac{f(3x)}{x}$.
2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.
3. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{3x+5} - 2}{x^2 - 1}$

Limites e funções trigonométricas

Teorema

As funções sen *e* cos *são contínuas.*

Teorema

Dois limites utéis:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \text{ e também } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Exercício

Calcule:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\operatorname{sen} x}$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$.
4. $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen} \pi x}{x-1}$

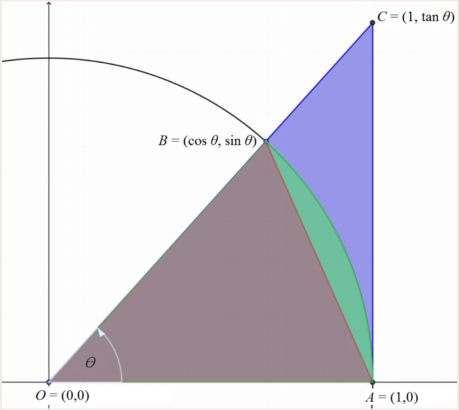
Funções trigonométricas e desigualdades

Teorema

Para $0 < x < \pi/2$*:*

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

Demonstração



Limites no infinito e limites infinitos

1. **Limites no infinito:**

Definição

$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ *significa: "eu posso fazer* $f(x)$ *arbitrariamente perto de* L*, tomando* x *suficientemente grande."*

Exemplos: $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. **Leis do limite:** se $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1$ e $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_2$, então:

$$f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1 + L_2 \text{ e também } f(x).g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} L_1.L_2$$

3. **Lei do quociente:**

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{L_1}{L_2} \text{ se } L_2 \neq 0.$$

Praticar com limites no infinito

Exercício

15. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x - 2}{2x + 1}$

16. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{1 - x^2}{x^3 - x + 1}$

17. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$

18. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3 + 6x^2 - 2}{2x^3 - 4x + 5}$

19. $\lim_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt{t} + t^2}{2t - t^2}$

20. $\lim_{t \to \infty} \dfrac{t - t\sqrt{t}}{2t^{3/2} + 3t - 5}$

21. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{(2x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2(x^2 + x)}$

22. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 1}}$

23. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

24. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{9x^6 - x}}{x^3 + 1}$

25. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{9x^2 + x} - 3x\right)$

26. $\lim_{x \to -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + 2x}\right)$

27. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}\right)$

28. $\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 1}$

29. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^2 + x}{x^3 - x + 2}$

30. $\lim_{x \to \infty} (e^{-x} + 2\cos 3x)$

31. $\lim_{x \to -\infty} (x^4 + x^5)$

32. $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{1 + x^6}{x^4 + 1}$

Limites infinitos

Definição (Limites do tipo $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$)

Suponhamos que exista a tal que $]a, \infty) \subset Dom(f)$. *Definimos:*

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *significa:*

   para cada $\epsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *com* $\delta > a$ *tal que* $x > \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ *significa:*

   para cada $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *com* $\delta > a$ *tal que* $x > \delta \Rightarrow f(x) < -\epsilon$.

Definição

Sejam $p \in \mathbb{R}$ *e suponhamos que exista b tal que* $]p, b[\subset Dom(f)$, *então:*
$\displaystyle\lim_{x\to p^+} f(x) = +\infty$ *significa:*

para cada $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *com* $p + \delta < b$ *tal que* $p < x < p + \delta \Rightarrow f(x) > \epsilon$.

Limits no ∞ de polinomiais e frações racionais

Exercício

$\lim_{x\to\infty} 4x^3 + 7x - 15.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} 3x^4 + 7x - 15.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^2+8x+1}.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{2x^4+8x+1}.$

Exercício

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^4+7x-15}{x^5+3x^2-1}.$

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

21. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

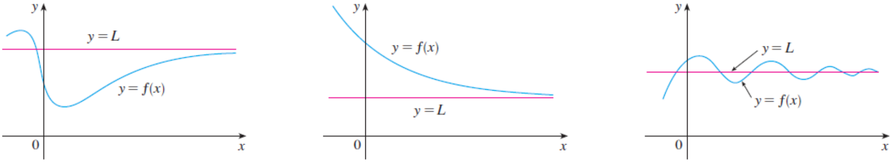
22. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

Assíntota horizontal:

Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$



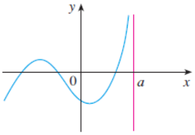
Assíntota vertical:

Definição

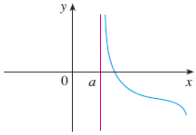
A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

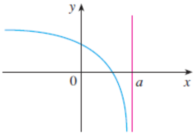
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$



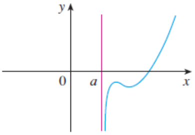
(a) $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

Exemplos de assintotas

Exercício

Encontre as assíntotas horizontal e vertical de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2} \qquad y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2} \qquad y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5} \qquad y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Variação: limites de frações com expoentes racionais

Exercício

23. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$

24. $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}\right)^{1/3}$

25. $\lim_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1 - x^3}{x^2 + 7x}\right)^5$

26. $\lim_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$

27. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

28. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

29. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

30. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

31. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

32. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

33. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

34. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

35. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x - 3}{\sqrt{4x^2 + 25}}$

36. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{4 - 3x^3}{\sqrt{x^6 + 9}}$

Como trabalhar com limites infinitos: somas e produtos

Somas:

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
3. $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
4. $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

1. $(+\infty).(+\infty) = +\infty$
2. $(-\infty).(-\infty) = +\infty$
3. $(-\infty).(+\infty) = -\infty$
4. $L.(+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
5. $L.(+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
6. $L.(-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
7. $L.(-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0.\infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}.$$

Limites of differences: como tratar $\infty - \infty$

Exemplos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x\to p^+} = 0$ *e que existe* $r > 0$ *tal que* $f(x) > 0$ *para* $p < x < p + r$. *Então:*

$$\lim_{x\to p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer numero racional $r = \frac{p}{q} > 0$ temos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^r} = 0$$

Exercício

$\lim_{x\to 2^-} \frac{-4}{x+2}$

Exercício

$\lim_{x\to 4^-} \frac{3}{(4-x)^3}$ *e* $\lim_{x\to 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$