# MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

## Aula 4/ Quarta 12/03/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

# Resumo Aula 3

1. Informações gerais:
   - **Email:** sylvain@ime.usp.br
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte
     `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`

---

2. **Transformações de gráficos: translações, esticamentos**
3. **Exemplo:** como estudar $y = 4x^2 + 3x + 13$ em relação ao gráfico de $y = x^2$
4. **Composição** $g \circ f(x) = g(f(x))$
5. **Dominio de uma função composta**

---

# Função composta

**Dominio de** $g \circ f$ **:**

**Teorema**

*$Dom(g \circ f) = \{x \mid x \in Dom(f)$ e também $f(x) \in Dom(g)\}$*

**Exercício**

*Determine $g \circ f$ para $g(x) = \frac{1}{x+2}$ e $f(x) = \frac{x}{x-3}$. Determine o dominio de $g \circ f$.*

# Funções Exponenciais: introdução e algumas propriedades

- **Caso mais simples:** para $n$ um inteiro $\geq$, e $a$ um número real:

$$a^n = a.a \ldots .a \text{ (n vezes)}$$

- **Caso 2:** seja $n > 0$ inteiro, $a \in \mathbb{R}$: vamos definir:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

- **Caso $a^x$ onde $x = \frac{p}{q}$ é racional:** vamos simplesmente definir:

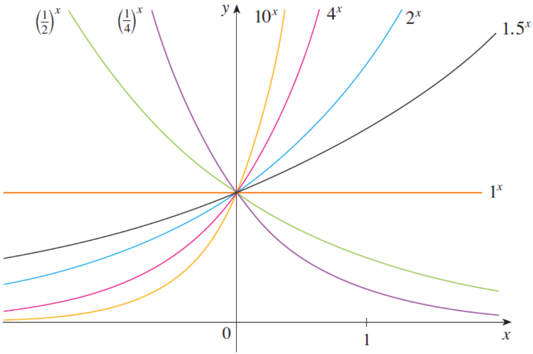
$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p$$

**Pergunta**

*Como definir $a^x$ quando $x$ é um número real?*

**Idéia:** seja $x = x_0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots$ (exemplo, $x = \pi = 3,1415\ldots$). Os números 3, depois 3, 1, depois 3, 14, etc são racionais, então podemos considerar $a_0^x$, e depois $a^{x_0,x_1}$, e depois $a^{x_0,x_1x_2}$. Essa sequência vai ter um limite, que a gente vai denotar por $a^x$.

# Primeiras propriedades das funções exponenciais




**Conclusão:** para cada $a > 0$, existe uma função $x \mapsto a^x$.

# Primeiro encontro com o limite

**Construção de $\sqrt{2}$**: como o limite de 1, depois $1,4$, depois $1,41$ ; $1,414$ …

## Teorema

*Seja uma seqüência $(x_n)$ de numeros reais que é crescente (isto é $x_n \leq x_{n+1}$) e limitada (isto é: existe um numero real $M$ tal que todos os $x_n$ são $\leq M$).*
*Então $(x_n)$ tem um limite.*

## Proof.

As partes inteiras dos $x_n$ são limitadas, então eu posso pegar a maior (seja $E \in \mathbb{Z}$. Tem um numero na seqüência cuja parte inteira é $E$ (vamos denotar ele $x_{N_0}$). Todos os $x_n$ com $n \geq N_0$ vão ter a mesma parte inteira (porque?).
Agora: para todos os numeros depois de $x_{N_0}$, eu posso olhar a primeira decimal e pegar a maior (vamos denotar ela de $E_1$): então existe um $x_{N_1}$ cuja expansão começa com $E_0, E_1$. Todos os $x_n$ com $n \geq N_1$ vão começar com $E_0, E_1$. $\square$

# Primeiro encontro com o limite II

## Proof.

Agora: para todos os numeros depois de $x_{N_1}$, eu posso olhar a segunda decimal e pegar a maior (vamos denotar ela de $E_2$): então existe um $x_{N_2}$ cuja expansão começa com $E_0, E_1 E_2$. Todos os $x_n$ com $n \geq N_2$ vão também começar com $E_0, E_1 E_2$ (porque).

Continuar assim, sem parar: a gente vai construir um número real $L = E_0, E_1 E_2 E_3 \ldots$, chamada o **limite** da seqüência $(x_n)$, e denotado por $L = \lim_{n \in \mathbb{N}} x_n$. □

## Observação

*Para cada* $\epsilon_k = \frac{1}{10^k} = 10^{-k}$*, existe* $N_k \in \mathbb{N}$ *tal que todos os* $x_n$ *com* $n \geq N_k$ *vão satisfazer* $|x_n - L| \leq \epsilon_k = 10^{-k}$

# Exponencial II: propriedades

**Teorema (Lei dos expoentes)**

*Se a e b forem números positivos e x e y, números reais quaisquer, então:*

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \qquad (ab)^x = a^x b^x$$

**Definição de** $e^x$: o número $e = 2,718\ldots$ é o unico tal que a função $e^x$ tem uma reta tangente de inclinação $m = 1$ no ponto $(0,1)$.
**Historia:** primeira definição de $e$: como limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ (Bernoulli 1680).

# Exponencial III: propriedades

## Teorema

1. *Se* $a = 1$ *então* $a^x = 1^x = 1$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$*,*
2. *Se* $a > 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente crescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x < a^y$*), e* $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$*, e* $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$*.*
3. *Se* $a < 1$ *então* $x \mapsto a^x$ *é estritamente decrescente (isto é:* $x < y \Rightarrow a^x > a^y$*), e* $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$*, e* $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$
4. *Para todos* $a > 0$*,* $x \mapsto a^x$ *é uma função continua.*

## Definição

*A notação*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

*(lida como "o limite de* $f(x)$ *quando* $x$ *tende a infinito é o infinito") significa: para qualquer numero* $M$*, existe um numero* $N$ *tal que* $f(x) > M$ *sempre que* $x > N$*.*

# Praticar com $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$

**Exercício**

*Mostrar que* $\lim_{x\to\infty} 3x = \infty$.

**Exercício**

*Mostrar que* $\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$.

**Exercício**

*Mostrar que* $\lim_{x\to\infty} x - \cos(2x) = \infty$.

# Exponencial IV

Na verdade ja podemos demostrar tudo! Por exemplo:

**Proof.**

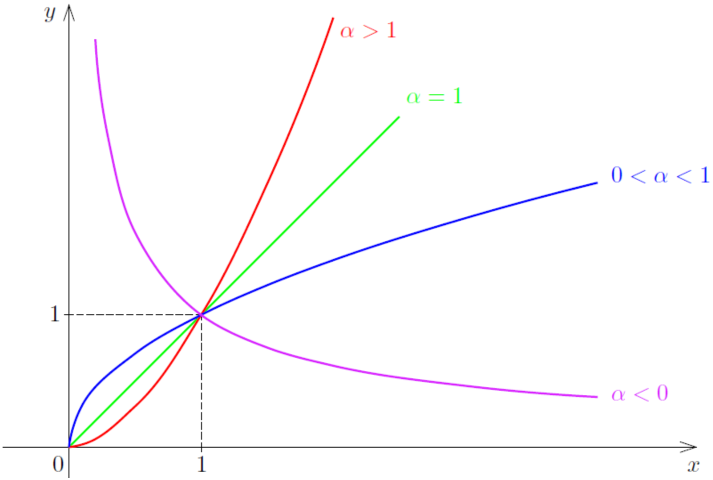
(2) Para inteiros $N_1 < N_2$, temos que $a^{N_1} < a^{N_2}$, e também $a^{1/N_1} < a^{1/N_2}$. Então se $x < y$ (e $x, y$ são racionais) temos que $a^x < a^y$. Depois no caso geral, quando $x, y$ são reais, é suficiente encontrar numeros racionais $u < v$ tais que $x < u < v < y$ e mostrar

$$a^x < a^u < a^v < a^y.$$

□

# Funções potência $x \mapsto x^\alpha$

**Gráfico:**



# Exemplos: Frequencia cardiaca e Taxa metabólica basal

**Exemplo de função potência:**

$$Freq.Card. = K.(Peso)^{-1/4}$$

(passarinho: 800 , rato: 250-450 pulsações, humano : 60-100 (mas ciclista M. Indurain tem 28 ...), cavalo:30 )

**Definição**

*A TMB (" Taxa metabólica basal") é a quantidade de energia produzida cada dia por um animal .*

**Definição (Lei de Kleiber)**

$TMB = M^{3/4}$, *onde M é a massa do animal.*

# Limites: que significa $\lim_{x \to a} f(x) = L$?

**Como ler:** ″o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, é igual a $L$. Ou, também $f(x)$ tende a $L$ quando $x$ tende a $a$.
**Outra notação:** $f(x) \to L$ quando $x \to a$.
**Def. intuitiva 1:** ″eu posso fazer $f(x)$ arbitrariamente próximo de $L$, tomando $x$ suficientemente próximo de $a$.
**Def. intuitiva 2:** ″a distância entre $f(x)$ e $L$ pode ser arbitrariamente pequena, tomando-se a distância de $x$ a $a$ suficientemente pequena (mas não igual a 0)″.

## Definição

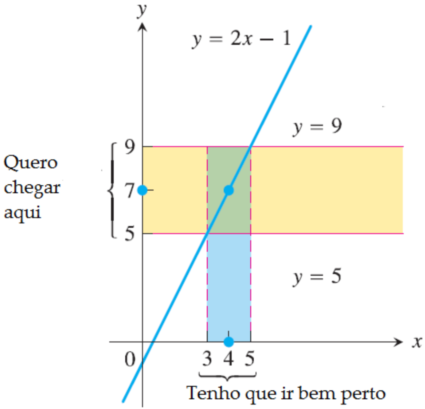
*Seja $f$ ua função definida sobre um intervalo aberto que contém $a$, exceto possivelmente no ponto $a$. A frase $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa: para todo número $\epsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que*

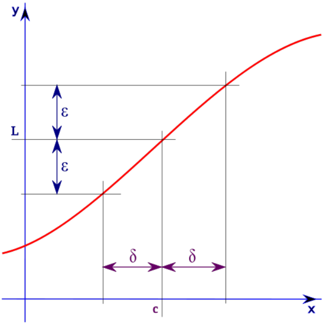
$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ sempre que } 0 < |x - a| < \delta$$

# Limites: Exemplos

## Exercício

*Mostrar que* $\lim_{x\to 0} x^2 + 1 = 1$. *Mostrar que* $\lim_{x\to 2} 4x + 2 = 6$.

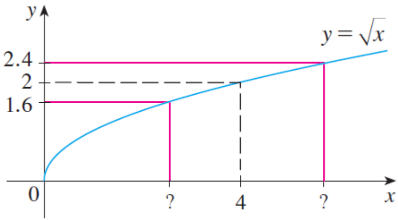


# Exemplos

## Exercício

*Escrever um $\delta$ tal que* $|x-4| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x}-2| < 0,4$



## Exercício

*Prove cada proposição usando a definição de limite (isto é os $\epsilon, \delta$).*

**19.** $\lim_{x \to 1} \frac{2 + 4x}{3} = 2$

**20.** $\lim_{x \to 10} \left(3 - \frac{4}{5}x\right) = -5$

**21.** $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = 5$

**22.** $\lim_{x \to -1.5} \frac{9 - 4x^2}{3 + 2x} = 6$

**23.** $\lim_{x \to a} x = a$

**24.** $\lim_{x \to a} c = c$

**25.** $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$

**26.** $\lim_{x \to 0} x^3 = 0$

**27.** $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

**28.** $\lim_{x \to -6^+} \sqrt[8]{6 + x} = 0$

**29.** $\lim_{x \to 2} (x^2 - 4x + 5) = 1$

**30.** $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2x - 7) = 1$

# Leis do limite

## Teorema

*Seja c uma constante e suponha que existam os limites* $\lim_{x\to a} f(x)$ *e* $\lim_{x\to a} g(x)$*, então:*

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$

2. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) - g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) - \lim\limits_{x\to a} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to a} [cf(x)] = c \lim\limits_{x\to a} f(x)$

4. $\lim\limits_{x\to a} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$

5. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \quad \text{if } \lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

# Exemplos

## Exercício

*Calcule o limite se existir:*

**3.** $\lim\limits_{x \to 3} (5x^3 - 3x^2 + x - 6)$

**4.** $\lim\limits_{x \to -1} (x^4 - 3x)(x^2 + 5x + 3)$

**5.** $\lim\limits_{t \to -2} \dfrac{t^4 - 2}{2t^2 - 3t + 2}$

**6.** $\lim\limits_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$

**7.** $\lim\limits_{x \to 8} (1 + \sqrt[3]{x})(2 - 6x^2 + x^3)$

**8.** $\lim\limits_{t \to 2} \left( \dfrac{t^2 - 2}{t^3 - 3t + 5} \right)^2$

**9.** $\lim\limits_{x \to 2} \sqrt{\dfrac{2x^2 + 1}{3x - 2}}$

## Exercício

*Calcule o limite se existir:*

**11.** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 5}$

**12.** $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

**13.** $\lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 5}$

**14.** $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

**15.** $\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

**16.** $\lim_{x \to -1} \frac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$

**17.** $\lim_{h \to 0} \frac{(-5 + h)^2 - 25}{h}$

**18.** $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

**19.** $\lim_{x \to -2} \frac{x + 2}{x^3 + 8}$

**20.** $\lim_{t \to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1}$

**21.** $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$

**22.** $\lim_{u \to 2} \frac{\sqrt{4u + 1} - 3}{u - 2}$

# Exemplos 2

## Exercício

*Calcule o limite se existir:*

**23.** $\displaystyle\lim_{x\to-4} \frac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{x}}{4+x}$

**24.** $\displaystyle\lim_{x\to-1} \frac{x^2+2x+1}{x^4-1}$

**25.** $\displaystyle\lim_{t\to0} \frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$

**26.** $\displaystyle\lim_{t\to0} \left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2+t}\right)$

**27.** $\displaystyle\lim_{x\to16} \frac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

**28.** $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{(3+h)^{-1}-3^{-1}}{h}$

**29.** $\displaystyle\lim_{t\to0} \left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$

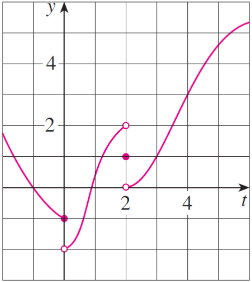
**30.** $\displaystyle\lim_{x\to-4} \frac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

**31.** $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$

**32.** $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2}-\dfrac{1}{x^2}}{h}$

# Limites laterais: $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

**Lido como:** "o limite esquerdo de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$. Também: o limite de $f(x)$ quando $x$ tende a $a$ pela esquerda.




## Exercício

*Escrever a definição rigorosa do limite esquerdo e direito.*

## Observação

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ *se e somente se* $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

# Lista 1, no site

1. **Prove:** que a soma de um racional com um iracional é um iracional.
2. **Resolver**
$$|x-2|+|2x-1|<1$$
3. **Resolver as inequações:**
    1. $(x-3(x+7)<0$
    2. $\frac{2x-1}{x-5}>4$
    3. $(2x+3)(x^2-4)>0$
    4. $x^2-5x+6>0$
    5. $x^3-1>0$
    6. $|x+1|<|2x-1|$
    7. $|x-2|+|x-1|>1$
4. **Estude o sinal da expressão:**
    1. $(2x-1)(x^2+1)$
    2. $(x-2)(x+3)(x^2-1)$
    3. $(x-5)(x^4+2)$

# Lista 1

1. **Fatore o polinômio:**

$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

2. **Elimine o módulo em:** $|x-1| + |x+5|$
3. **Expresse o conjunto com a notação de intervalos:**

$$\{x | 3x + 1 < \frac{x}{3}\}$$

4. **Esboce os gráficos das funções:**

$$f(x) = |2x-1|, f(x) = x^2 - 3x + 4, f(x) = |x-2| + 5$$

5. **Determine a equação** da reta que passa pelo ponto $(1,3)$ e paralela a $y = 2x + 3$
6. **Determine o domínio das funções:**

$$\sqrt{x+2}, \sqrt{\frac{2x-1}{1-3x}}, \frac{x}{x+2}, \sqrt{x^2-1}$$