

MAT 0143

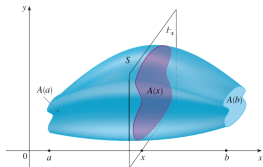
Aula 24/ Quarta 04/06/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

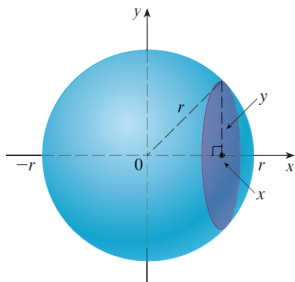
2014

Volumes

Ideia: cortar o objeto em cilindros de base $A(x)$ e altura dx , e depois fazer a soma $\int_a^b A(x)dx$, onde $A(x)$ é a área da secção transversal.



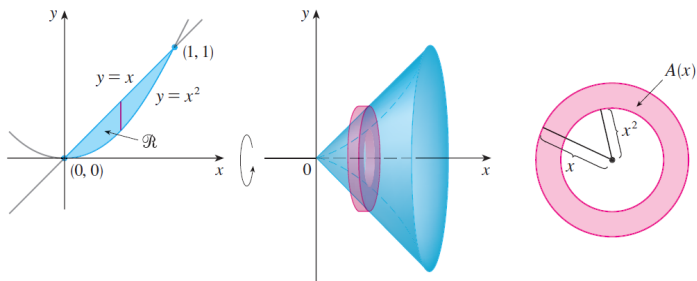
Exemplo da esfera de raio r : aqui $A(x) = \pi.y^2 = \pi.(r^2 - x^2)$.



Volumes dos sólidos de revolução

São sólidos obtidos pela rotação de uma região ao redor de um eixo.

Método 1: método dos "anéis"



Aqui a área da secção transversal é simplesmente:

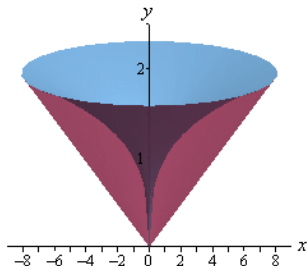
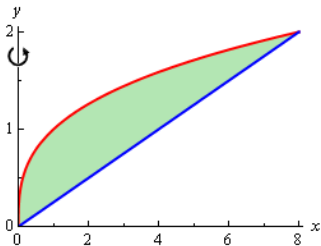
$$A(x) = \pi(\text{raio externo})^2 - \pi(\text{raio interno})^2 = \text{area de um anel}$$

Exemplo:

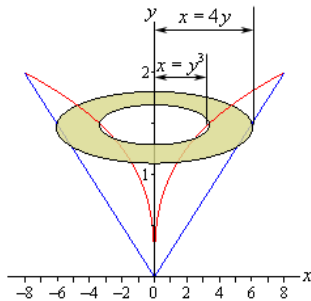
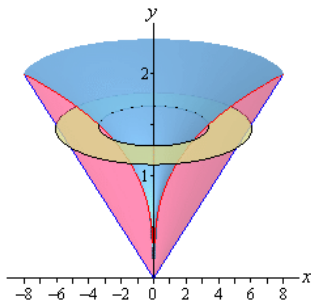
Exercício

Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região S ao redor do eixo y . A região S é a região em $x \geq 0, y \geq 0$ entre os gráficos de $y = x/4$ e $y = \sqrt[3]{x}$

Região S :



Exemplo:



Secção transversal:

$$A(y) = \pi((4y)^2 - (y^3)^2) = \pi.(16y^2 - y^6)$$

Volume:

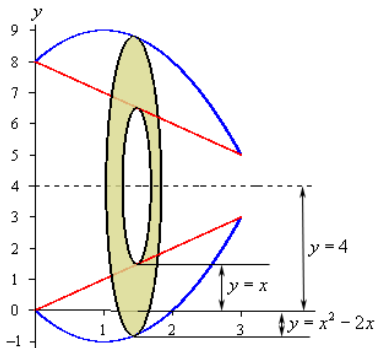
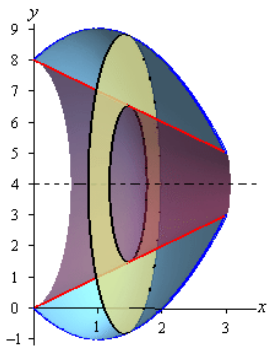
$$V = \int_0^2 A(y)dy = \pi. \int_0^2 16y^2 - y^6 dy = \pi. \left[\frac{16}{3}y^3 - \frac{1}{7}y^7 \right]_0^2 = \frac{512}{21}\pi$$

Mais exemplos:

Exercício

Determine o volume do sólido obtido pela rotação da região S ao redor da reta $y = 4$. A região S é a região entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2 - 2x$

Região S

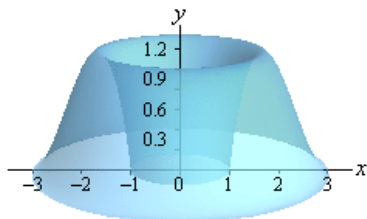
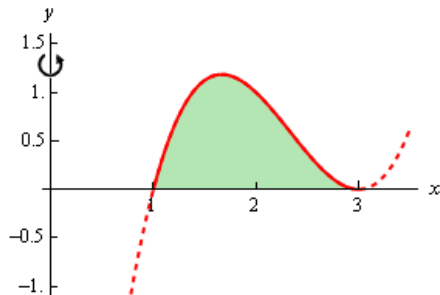


Método das cascas cilíndricas

Exercício

Determine o volume do sólido abaixo, onde $y = (x - 1)(x - 3)^2$

Região S

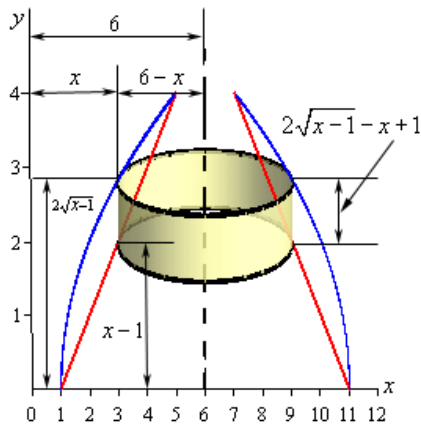
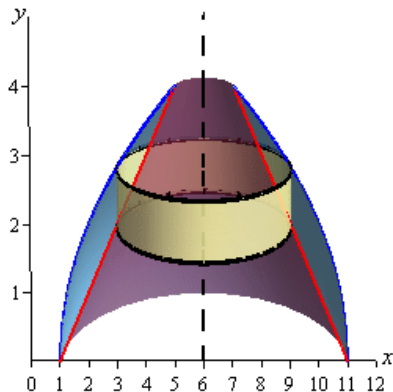


Método das cascas cilíndricas II

Exercício

Determine o volume do sólido abaixo, onde as duas curvas são $y = (x - 1)$ e $y = 2\sqrt{x - 1}$.

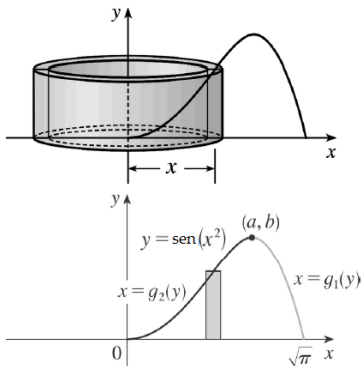
Região S



Método das cascas cilíndricas II

Exercício

Determine o volume do sólido abaixo, onde as duas curvas são $y = 0$ e $y = \text{sen}(x^2)$.

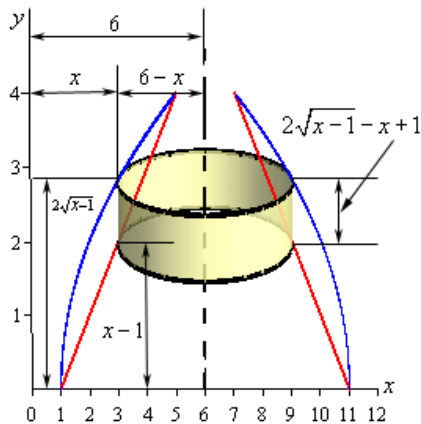
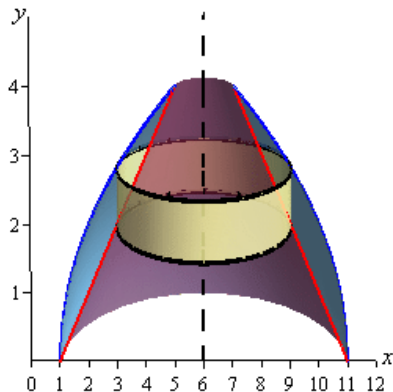


Método das cascas cilíndricas III

Exercício

Determine o volume do sólido abaixo, onde as duas curvas são $y = (x - 1)$ e $y = 2\sqrt{x - 1}$.

Região S



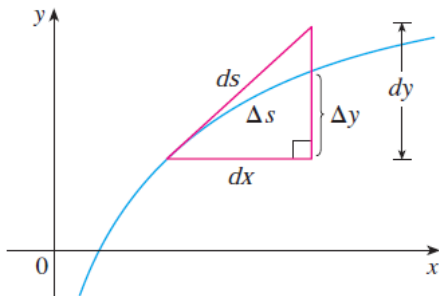
Comprimento de gráfico

Formula do comprimento:

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Porque? Para um pedaço de gráfico, o comprimento é

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$



Exercício

Calcule o comprimento do gráfico da função dada:

① $y = (2/3)x^{3/2}$ para $0 \leq x \leq 1$ (Resp: $(2/3)(2\sqrt{2} - 1)$).

② $y = x^3$ para $0 \leq x \leq 2$;

Comprimento de curva em forma paramétrica

Isso significa que a curva é dada como:

$$x = x(t) \text{ e } y = y(t),$$

onde $x(t)$ e $y(t)$ são funções de um parâmetro $t \in I$.

Exemplos: parábola $x(t) = t, y(t) = t^2$. Círculo: $(\cos t, \sin t)$.

$$\text{Comprimento} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Comprimento da circunferência de raio R .

Exercício

Calcule o comprimento da curva dada em forma paramétrica:

- 1 $x = 3t$ e $y = 2t^{3/2}$, $0 \leq t \leq 1$.
- 2 $x = 2t + 1$ e $y = t - 1$, $1 \leq t \leq 2$.

Área de um semicírculo de raio 1:

$$A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Podemos fazer $x = \operatorname{sen}u$, então $\cos(u) = \sqrt{1-x^2}$ e $dx = \cos(u)du$.
Assim podemos obter: (lembra que $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(u) \cos(u) du = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2u))/2 du = \pi/2$$

Exercício

Calcule $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Já sabemos o resultado $\arcsin(x) + C$, mas aqui podemos fazer a substituição $x = \operatorname{sen}(u)$.

Exercício

Fazer $x = \operatorname{tg}(u)$ para calcular $\int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}$.

Exercício

Antiderivada de $1/\operatorname{sen}x$: Fazer $u = \operatorname{tg}(x/2) \Rightarrow x = 2\operatorname{tg}^{-1}(u)$ e $dx = 2du/(1+u^2)$. Agora $1+u^2 = 1/(\cos(x/2))^2$ e $\frac{2u}{1+u^2} = \operatorname{sen}x$. Fazer agora a substituição.

Observação: a mudança $u = \operatorname{tg}(x/2)$ é muito util:

- 1 mostrar que $dx = \frac{2du}{1+u^2}$
- 2 mostrar que $\operatorname{sen}x = \frac{2u}{1+u^2}$
- 3 mostrar que $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

Conclusão: cada fração racional com \cos , sen pode ser escrita como uma fração racional normal, em u !

Exercício

Calcule as antiderivadas:

1 $\int \sqrt{1 - 4x^2} dx$

2 $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx$ (integração por partes aqui seria melhor)

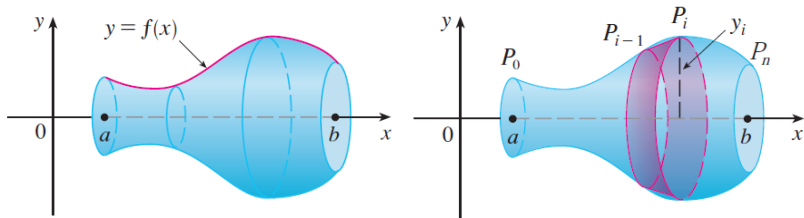
3 $\int \frac{dx}{1+\operatorname{sen}x}$ (fazer $u = \operatorname{tg}(x/2)$).

4 $\int \frac{1}{\cos x} dx$

Área de uma superfície de revolução

Definição

Uma superfície de revolução é obtida quando uma curva é girada ao redor de uma reta.



Área total da superfície de revolução: é a soma das áreas de pequenas faixas (=rotação de um pequeno segmento de curva). Vamos dar a formula para a rotação ao redor do eixo x :

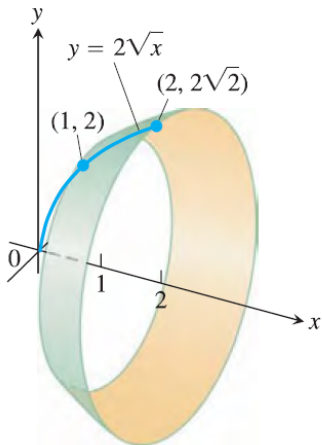
$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Exemplos: Área de uma superfície de revolução

Exercício

Calcule a área da superfície obtida pela rotação da curva ao redor do eixo x :

$$y = 2\sqrt{x}, 1 \leq x \leq 2.$$



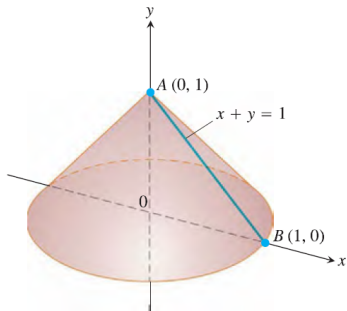
Área de uma superfície de revolução: rotação ao redor do eixo y

Área total da superfície de revolução:

$$S = \int_a^b 2\pi g(y) \cdot \sqrt{1 + (g'(y))^2} dy$$

Exercício

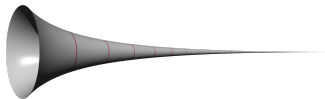
Cone obtido pela rotação de $x = 1 - y$, $0 \leq y \leq 1$, ao redor do eixo y .



Trombeta de Gabriel

Definição

A trombeta de Gabriel (=do anjo Gabriel) é a superfície de revolução obtida pela rotação da curva $y = \frac{1}{x}$, com $x \in [1, \infty)$ ao redor do eixo x .



Volume do solido de revolução:

$$V = \int_1^{+\infty} \pi \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) dx := \pi \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \int_1^r \pi \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

Mas isso é:

$$= \pi \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} [-1/x]_1^r = \pi \cdot \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{r}\right) = \pi.$$

Área da superfície de revolução:

$$A = 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \geq 2\pi \int_1^r \frac{1}{x} dx = 2\pi \ln r \rightarrow \infty!$$