

MAT 0143

Aula 21/ Segunda 26/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Teorema fundamental do cálculo

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f , isto é, uma função tal que $F' = f$.

Exercício

Calcule as derivadas:

1 $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$

2 $y = \int_0^{x^4} \cos^2 \theta d\theta.$

Praticar: calcular a integral (se existe)

$$19. \int_{-1}^2 (x^3 - 2x) dx$$

$$20. \int_{-1}^1 x^{100} dx$$

$$21. \int_1^4 (5 - 2t + 3t^2) dt$$

$$22. \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$$

$$23. \int_1^9 \sqrt{x} dx$$

$$24. \int_1^8 x^{-2/3} dx$$

$$25. \int_{\pi/6}^{\pi} \sin \theta d\theta$$

$$26. \int_{-5}^5 e dx$$

$$27. \int_0^1 (u + 2)(u - 3) du$$

$$28. \int_0^4 (4 - t)\sqrt{t} dt$$

$$29. \int_1^9 \frac{x - 1}{\sqrt{x}} dx$$

$$30. \int_0^2 (y - 1)(2y + 1) dy$$

$$31. \int_0^{\pi/4} \sec^2 t dt$$

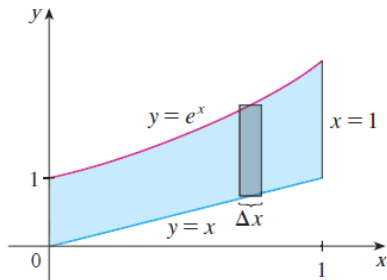
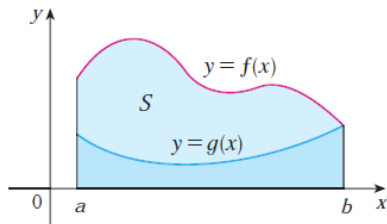
$$32. \int_0^{\pi/4} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

Cálculo de áreas 1

Definição

Seja f contínua em $[a, b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$. Vamos definir A como o conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Então:

$$\text{área } A = \int_a^b f(x) dx.$$



Áreas entre duas curvas

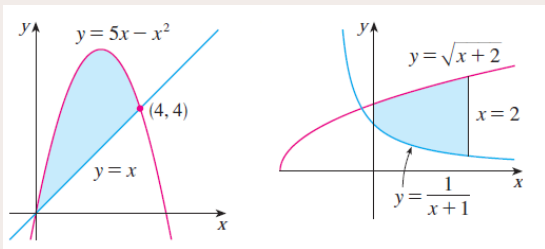
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Áreas entre duas curvas

Exercício

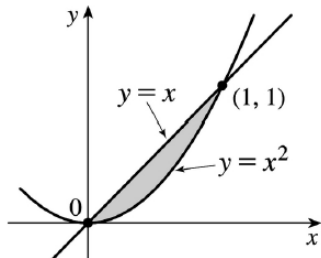
Encontre a área da região entre $y = x$ e $y = x^2$

Solução: Temos que determinar a interseção das duas curvas:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Depois, entre $x = 0$ e $x = 1$ temos que $x \geq x^2$ então:

$$A = \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

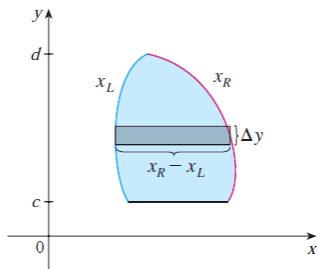
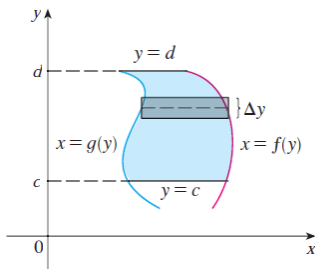


Áreas entre duas curvas

Exercício

Encontre a área da região entre $y = \sqrt{x}$ e $y = x/2$ e $0 \leq x \leq 9$

Funções de y : as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.



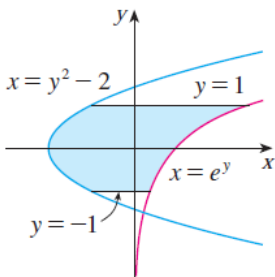
Áreas entre duas curvas

Funções de y :

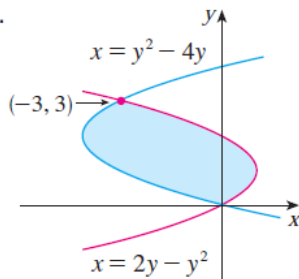
Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:

3.



4.



Movimento de uma partícula no eixo x

Uma partícula se desloca no eixo x , com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da partícula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t) dt$$

Definição

O espaço percorrido pela partícula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)| dt$$

Exercício

Uma partícula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

- 1 Calcule o deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.
- 2 Qual é o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \dots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_1^*) + \dots + f(x_n^*))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

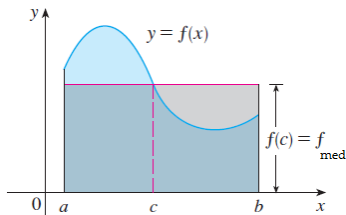
Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c) \cdot (b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xícara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?

Integrais indefinidas

Definição

A integral indefinida de f é o conjunto de todas as antiderivadas de f . Ela é denotada por

$$\int f(x)dx.$$

Teorema

Para determinar $\int f(x)dx$, é suficiente de encontrar uma antiderivada F de f , e depois

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitraria.}$$

Tabela de antiderivadas

$$\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int k dx = kx + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \tan^{-1}x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}x + C$$

Regra da Substituição

Teorema

Se $u = g(x)$ for uma função diferenciável cuja imagem é um intervalo I e f for contínua em I então

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = \int f(u)du$$

Este teorema é uma consequência imediata da regra da cadeia:

$$\int F'(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C = F(u) + C = \int f(u)du$$

Como utilizar o teorema? $\int x \cdot \cos(x^2 + 1)dx$. Vamos fazer $u = x^2 + 1$, então $du = 2xdx$. Isso implica: $xdx = \frac{1}{2}du$. Finalmente,

$$\int x \cdot \cos(x^2 + 1)dx = \frac{1}{2} \int \cos(u)du$$

Mas agora $\frac{1}{2} \int \cos(u)du = \frac{1}{2}\text{senu} + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2 + 1) + C$.

Praticar com a regra da Substituição

$$9. \int (1 - 2x)^9 dx$$

$$10. \int (3t + 2)^{2.4} dt$$

$$11. \int (x + 1)\sqrt{2x + x^2} dx$$

$$12. \int \sec^2 2\theta d\theta$$

$$13. \int \frac{dx}{5 - 3x}$$

$$14. \int u\sqrt{1 - u^2} du$$

$$15. \int \sin \pi t dt$$

$$16. \int e^x \cos(e^x) dx$$

$$17. \int \frac{e^u}{(1 - e^u)^2} du$$

$$18. \int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$19. \int \frac{a + bx^2}{\sqrt{3ax + bx^3}} dx$$

$$20. \int \frac{z^2}{z^3 + 1} dz$$

$$21. \int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

$$22. \int \cos^4 \theta \sin \theta d\theta$$

Algumas Respostas

- 9) $(-1/20)(1 - 2x)^{10}$
- 11) $(1/3)(x(2 + x))^{3/2}$
- 14) $(-1/3)(1 - u^2)^{3/2}$
- 21) $(\ln(x))^3/3$

Regra da Substituição para integrais definidas:

Teorema

Se g' for contínua em $[a, b]$ e f for contínua na variação de $u = g(x)$ então

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Regra da Substituição para integrais definidas:

$$61. \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (x^3 + x^4 \tan x) dx$$

$$62. \int_0^{\pi/2} \cos x \sin(\sin x) dx$$

$$63. \int_0^{13} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1+2x)^2}}$$

$$64. \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$65. \int_0^a x \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

$$66. \int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4 \sin x dx$$

$$67. \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx$$

$$68. \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}} dx$$

$$69. \int_e^{e^4} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x}}$$

$$70. \int_0^{1/2} \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$71. \int_0^1 \frac{e^z + 1}{e^z + z} dz$$

$$72. \int_0^{T/2} \sin(2\pi t/T - \alpha) dt$$

Integração por partes

Derivada de um produto:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

Ou, também:

$$f(x)g'(x) = [f(x) \cdot g(x)]' - f'(x) \cdot g(x)$$

Teorema (Regra de integração por partes)

Vamos supor que $f'(x) \cdot g(x)$ tem uma primitiva, então:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx$$

Outra notação: podemos fazer $u = f(x)$ e $v = g(x)$, então $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$ e

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Exercício

Calcule:

① $\int x.e^x dx$ (Resp: $e^x(x - 1) + C$)

② $\int \ln(x) dx$ (Resp: $x.\ln(x) - x + C$)

③ $\int (\ln x)^2 dx$ (Resp: $2x - 2x.\ln(x) + x(\ln(x))^2 + C$)

④ $\int x \operatorname{sen} x dx$ (Resp: $-x.\cos x + \operatorname{sen} x + C$)

Integração por partes para integrais definidas

Teorema

Sejam f e g duas funções com derivadas contínuas em $[a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Exercício

Calcule:

- 1 $\int_0^1 x.e^x dx$
- 2 $\int_0^{\pi/2} e^x . \cos x dx$
- 3 $\int_0^x t^2 . e^{-st} dt$
- 4 $\int_1^2 \ln x dx$