MAT 0143

Aula 18/ 14/05/2014

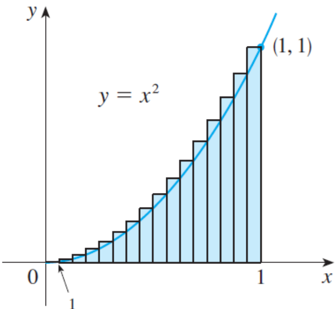
Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Definição

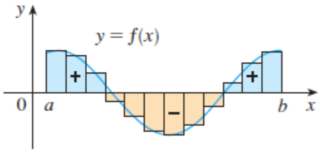
Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Podemos dividir $[a, b]$ em n subintervalos $[x_0, x_1], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1}, x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

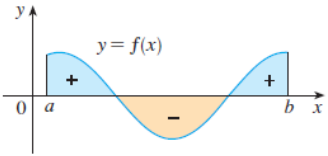
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$



Propriedades da integral

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)





Teorema

1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então*
   $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Mais propriedades da integral

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

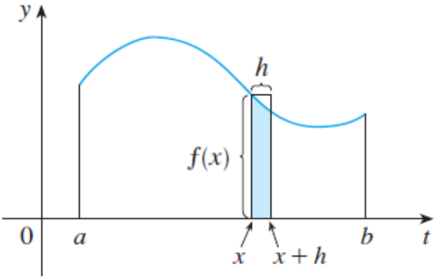
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a),$ onde c é constante

2. $\displaystyle\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

3. $\displaystyle\int_a^b c f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx,$ onde c é constante

4. $\displaystyle\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$



Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a,b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo

$$
\begin{aligned}
g(x+h) - g(x) &= \int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \left(\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt \right) - \int_a^x f(t)\,dt \\
&= \int_x^{x+h} f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

$$
\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt
$$

Agora o ultimo termo é quase como $h.f(x)$ então $F'(x) = f(x)$.

Teorema fundamental do cálculo, parte 2

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Prova: com $g(x) = \int_a^x f(t)dt$, sabemos que $g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt$. Mas também sabemos que duas antiderivadas de f diferem por uma constante

$$F(x) = g(x) + C$$

então $F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = \int_a^b f(t)dt$.

Praticar: calcule as derivadas

7. $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1}\, dt$

8. $g(x) = \int_3^x e^{t^2 - t}\, dt$

9. $g(s) = \int_5^s (t - t^2)^8\, dt$

10. $g(r) = \int_0^r \sqrt{x^2 + 4}\, dx$

11. $F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + \sec t}\, dt$

Praticar: calcule as derivadas

12. $G(x) = \int_x^1 \cos\sqrt{t}\, dt$

13. $h(x) = \int_1^{e^x} \ln t\, dt$

14. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4 + 1}\, dz$

15. $y = \int_0^{\tan x} \sqrt{t + \sqrt{t}}\, dt$

16. $y = \int_0^{x^4} \cos^2\theta\, d\theta$

17. $y = \int_{1-3x}^{1} \frac{u^3}{1 + u^2}\, du$

18. $y = \int_{\sin x}^{1} \sqrt{1 + t^2}\, dt$

56. $g(x) = \int_{1-2x}^{1+2x} t \sin t\, dt$

57. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{t^2}\, dt$

58. $F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2x} \arctan t\, dt$

59. $y = \int_{\cos x}^{\sin x} \ln(1 + 2v)\, dv$

Teorema fundamental do cálculo

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 1)

Se f for contínua em $[a, b]$ então a função g definida por

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad a \leq x \leq b$$

é continua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) e $g'(x) = f(x)$.

Teorema (Teorema fundamental do cálculo, parte 2)

Se f for contínua em $[a, b]$ então

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

onde F é qualquer antiderivada de f, isto é, uma função tal que $F' = f$.

Praticar: calcule as derivadas

Exercício

Calcule as derivadas:

1. $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$
2. $y = \int_0^{x^4} \cos^2 \theta d\theta.$

19. $\int_{-1}^{2} (x^3 - 2x)\, dx$

20. $\int_{-1}^{1} x^{100}\, dx$

21. $\int_{1}^{4} (5 - 2t + 3t^2)\, dt$

22. $\int_{0}^{1} \left(1 + \frac{1}{2}u^4 - \frac{2}{5}u^9\right) du$

23. $\int_{1}^{9} \sqrt{x}\, dx$

24. $\int_{1}^{8} x^{-2/3}\, dx$

25. $\int_{\pi/6}^{\pi} \sin\theta\, d\theta$

26. $\int_{-5}^{5} e\, dx$

27. $\int_{0}^{1} (u + 2)(u - 3)\, du$

28. $\int_{0}^{4} (4 - t)\sqrt{t}\, dt$

29. $\int_{1}^{9} \frac{x - 1}{\sqrt{x}}\, dx$

30. $\int_{0}^{2} (y - 1)(2y + 1)\, dy$

31. $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2 t\, dt$

32. $\int_{0}^{\pi/4} \sec\theta \tan\theta\, d\theta$

Praticar com integrais

Exercício

A função erro em probabilidade é dada por

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Mostrar que $e^{x^2} erf(x)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$y' = 2xy + \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

Exercício

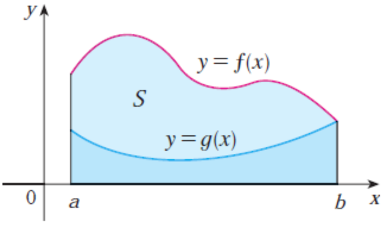
Determinar os intervalos de concavidade para

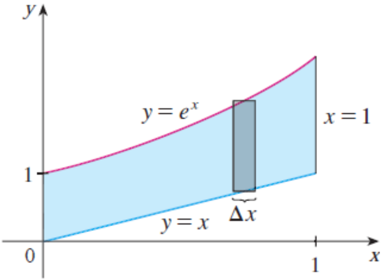
$$y = \int_0^x \frac{t^2}{t^2 + t + 2} dt$$

Definição

Seja f contínua em $[a,b]$ com $f(x) \geq 0$ em $[a,b]$. Vamos definir A como o conjunto do plano limitado pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = f(x)$. Então:

$$\text{área } A = \int_a^b f(x)dx.$$





Áreas entre duas curvas

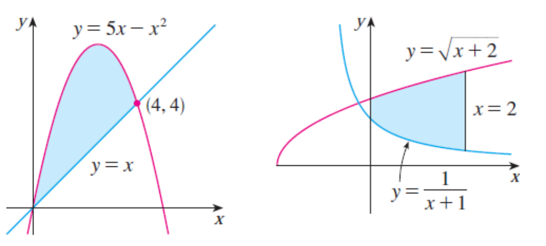
Definição

A área A da região limitada pelas curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ e as retas $x = a$ e $x = b$ onde f e g são contínuas e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$ é:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx.$$

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Exercício

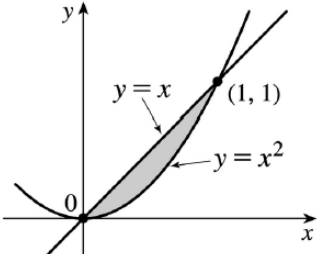
Encontre a área da região entre $y = x$ e $y = x^2$

Solução: Temos que determinar a interseção das duas curvas:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0 \text{ou } x = 1$$

Depois, entre $x = 0$ e $x = 1$ temos que $x \geq x^2$ então:

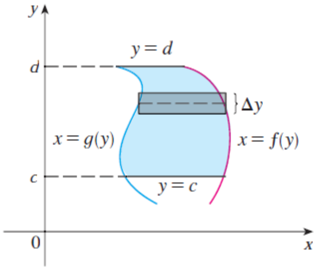
$$A = \int_0^1 (x - x^2)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

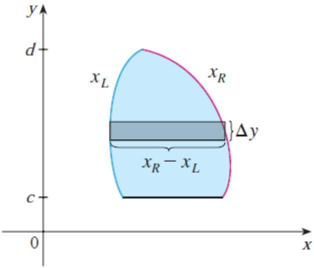


Exercício

Encontre a área da região entre $y = \sqrt{x}$ *e* $y = x/2$ *e* $0 \leq x \leq 9$

Funções de y: as vezes, é mais facil de descrever uma região com curvas do tipo $x = g(y)$.

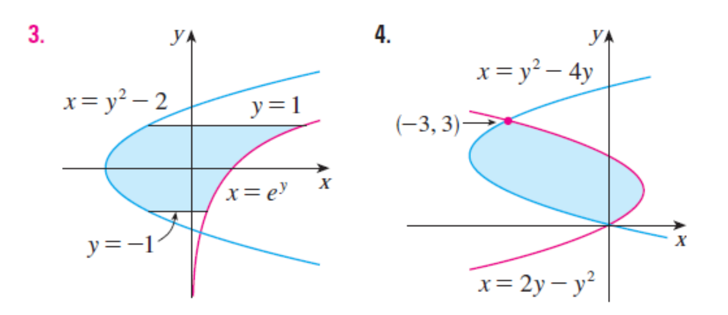




Funções de y:

Exercício

Encontre as áreas das regiões sombreadas:



Movimento de uma particula no eixo x

Uma particula se desloca no eixo x, com equação $x = x(t)$ e velocidade $v = v(t)$ (função contínua em $[a, b]$).

Definição

O deslocamento da particula entre os instantes a e b é a diferença

$$x(b) - x(a) = \int_a^b v(t)dt$$

Definição

O espaço percorrido pela particula entre os instantes a e b é definido como:

$$\int_a^b |v(t)|dt$$

Movimento de uma particula no eixo x

Exercício

Uma particula desloca-se sobre o eixo x com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geq 0$.

1. *Calcule o deslocamento entre $t = 1$ e $t = 3$.*
2. *Qual é o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?*

Valor Médio de uma função

Para uma quantidade finita de números:

$$y_{med} = \frac{y_1 + y_2 \ldots + y_n}{n}$$

Para um número infinito de medidas: dado um gráfico da temperatura $T = f(t)$ $0 \leq t \leq 24$ horas, podemos fazer 24 medidas e calcular a média (isto é fazer uma medida durante a primeira hora do dia, uma medida durante a segunda hora, etc...)

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n}, \text{ com } n = 24$$

mas temos que

$$\frac{f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star)}{n} = \frac{1}{b-a} . \frac{b-a}{n} . (f(x_1^\star) + \ldots + f(x_n^\star))$$

cujo limite é $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

Valor Médio de uma função

Então podemos definir:

Definição

O valor médio da função f no intervalo $[a, b]$ é:

$$f_{med} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

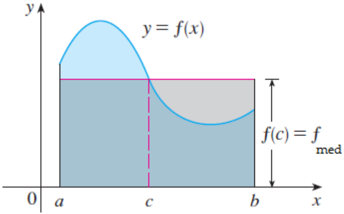
Teorema

Se f é contínua em $[a, b]$ então existe um $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c).(b-a)$$

Prova: O teorema do valor médio para $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diz que existe $c \in (a, b)$ tal que $F(b) - F(a) = F'(c).(b-a)$. Mas agora, temos que $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$.

Valor Médio de uma função



Exercício

Se uma xicara de café tem uma temperatura de 95 graus, em uma sala cuja temperatura ambiente é de 20 graus. De acordo com a Lei de resfriamento de Newton, a temp. do café após t minutos será:

$$T(t) = 20 + 75e^{-t/50}$$

Qual é a temperatura média do café durante a primeira meia hora?