MAT 0143

Aula 18/ 14/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Derivadas e formas indeterminadas: a regra de L'Hôspital

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como mostrar o teorema: caso facil onde f' é contínua: simplesmente observar que $f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a)$ perto de a.

Limites e Regra de L'Hospital:

$$* \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x\to 1} -x = -1$$

$$* \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}\, 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{4} = \frac{9}{4}$$

$$* \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+4}{3x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \text{ sem L'Hospital}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{6x+1} = \lim \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Mais exemplos:

ⓐ $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+7x}{5x^2+11}$ (Resp. $\frac{3}{5}$)

ⓑ $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ (Resp. 0)

ⓒ $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$ (Resp. 0)

Outras formas indeterminadas

Forma indeterminada $0.\infty$

ex: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x^3$ (escrever $x.\ln x$ como $\dfrac{\ln x}{1/x}$)

Praticar com: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. (Resposta: 1)

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Resp. 1).

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Como fazer? $y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

estudar $\ln y = x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$

e aplicar L'Hospital

Forma ∞^0

$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(e^x + x^2\right)^{2/x}$ mesma ideia: tomar o logaritmo natural

(Resp. $= e^2$)

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicirculo de raio r.

Exercício

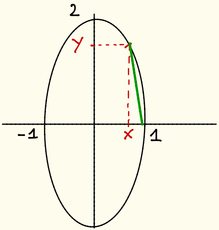
Encontreo os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ *que estão mais distantes do ponto* $(1, 0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distança $d^2 = (x-1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos criticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Area do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Solução



$(\text{Dist.})^2$ entre $(1,0)$ e (x,y) é $= (x-1)^2 + y^2$

mas: $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2$

então: $\underset{\underset{f(x)}{\parallel}}{d^2} = (x-1)^2 + 4 - 4x^2$

Agora: $f'(x) = 2(x-1) - 8x = -6x - 2$

núm. crítico: $-6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$.

$f''(x) = -6 < 0$

---

* Teste da derivada segunda: $\frac{-1}{3}$ é máximo local

---

* Vamos mostrar que $-\frac{1}{3}$ é máx. global:

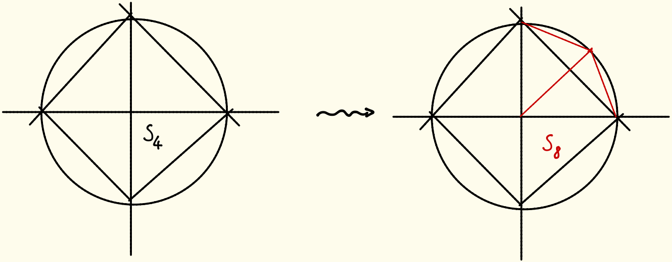
$f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, temos: $f\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3} - 1\right)^2 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9} + \frac{36}{9} - \frac{4}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

$f(-1) = (-1-1)^2 + 4 - 4 = 4$

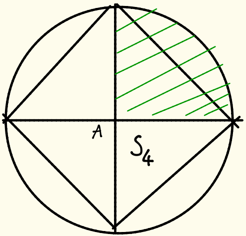
$f(1) = 0$.

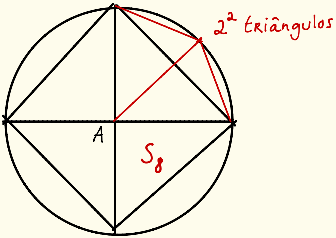
Concl: $-\frac{1}{3}$ é o único máx. global.

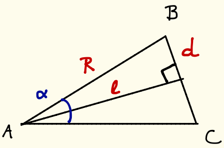
Problemas de area: como calcular a area de um disco?



Pergunta: qual é o limite S_∞ da seq. S_n?







Temos: Area (Triângulo ABC) $= d \cdot \ell = \left(R \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \left(R \cos \frac{\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{R^2}{2} \cdot 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

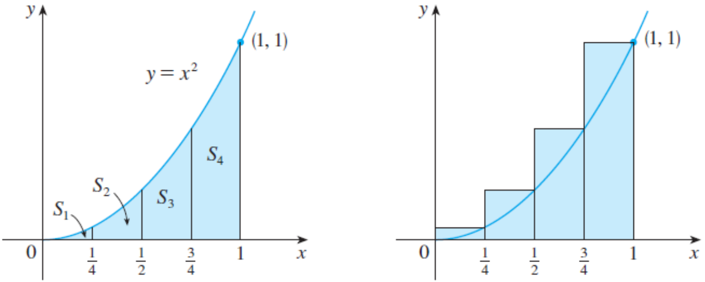
$$= \frac{R^2}{2} \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Depois de n etapas: temos 2^n triângulos, com angulo $\hat{A} = \frac{\pi/2}{2^n}$

Soma das áreas dos triângulos $= 2^n \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi/2}{2^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^n}{\pi/2} \cdot \frac{R^2}{2} \operatorname{sen} \frac{\pi/2}{2^n}$

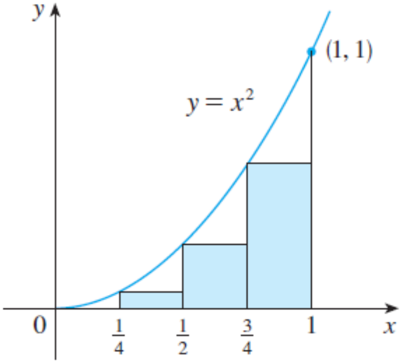
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 1 = \frac{\pi R^2}{4}$$

Ideia: como calcular a área da região S que está sob a curva $y = f(x)$? ("dividir e aproximar")



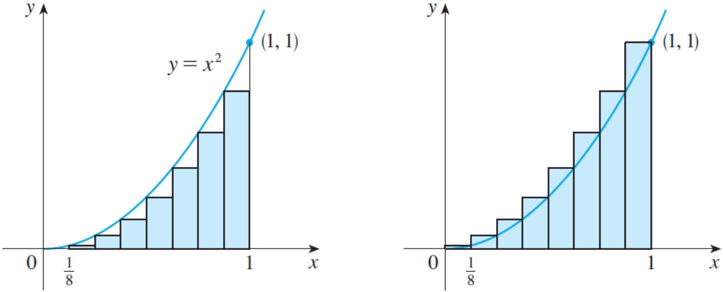
Aproximar com retângulos: obter uma estimativa superior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \leq R_1 + R_2 + R_3 + R_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $(1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2, (4/4)^2$.

Aproximar com retângulos: obter uma estimativa inferior da área: aqui $area(S) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq L_1 + L_2 + L_3 + L_4$. Os retângulos têm a mesma base $= 1/4$ e alturas $0, (1/4)^2, (2/4)^2, (3/4)^2$.



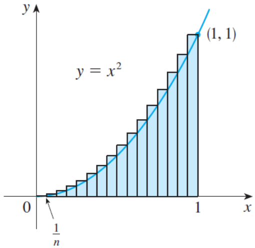
Aproximando com oito retângulos

Aproximar com 8 retângulos: estimativa inferior e superior da área: usando extremos esquerdos e direitos dos intervalos



Aproximando com n retângulos

Tomando o limite: vamos dividir $[0,1]$ em n intervalos iguais, construir retângulos usando os extremos direitos, calcular a soma das áreas dos n retângulos e fazer $n \to \infty$.



$$
\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n^2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
&= \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)
\end{aligned}
$$

Somas uteis:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Prova das 3 formulas

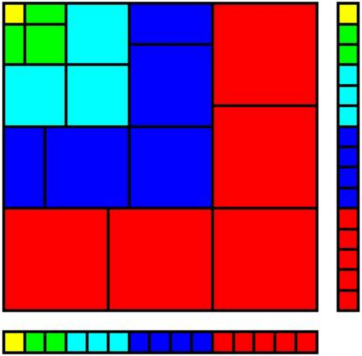
Formula 1: escrever

$$2S = (1 + 2 + \ldots + n) + (n + (n-1) + \ldots + 2 + 1)$$

$$= (1+n) + (2 + (n-1)) + \ldots + ((n-1) + 2) + (n+1) = n.(n+1)$$

Formula 2: indução!

Formula 3: prova geometrica:



Integral definida

Definição

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. Podemos dividir $[a,b]$ em n subintervalos $[x_0,x_1],\ldots[x_{n-1},x_n]$ de comprimentos iguais $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Em cada $[x_{i-1},x_i]$ vamos escolher um ponto amostral $x_i^\star$. Então a integral definida de f de a para b é:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$$

Teorema

Se f é continua em $[a,b]$ ou tem um número finito de descontinuidades, então a integral de f de a para b existe.

Vocabulario: $f(x)$=integrando, a,b são os limites de integração (inferior e superior).

Definição

A soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i^\star)\Delta x$ é chamada uma "soma de Riemann"

Exemplos

Exercício

Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

Exercício

Expresse o limite como uma integral definida no intervalo dado:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{x_i}}{1 + x_i} \Delta x, [1, 5]$$

Exercício

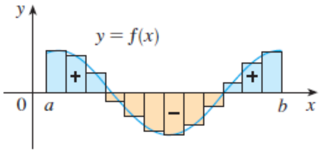
Se $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $1 \leq x \leq 6$, *escreve a soma de Riemann com* $n = 5$, *tomando como pontos amostrais os pontos médios.*

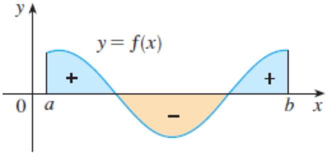
Exercício

Calcule $\int_1^2 x^3 dx$

Propriedades da integral

Interpretação da integral: área líquida (=diferença das áreas)





Teorema

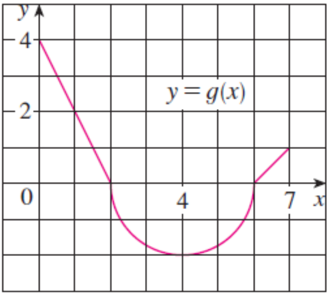
1. *Se* $f(x) \geq 0$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
2. *Se* $f(x) \geq g(x)$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
3. *Se* $m \leq f(x) \leq M$ *para* $a \leq x \leq b$ *então* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M.(b-a)$

Exemplos

Exercício

O gráfico de g consiste em duas retas e um semicircuo. Use-o para calcular cada integral.

(a) $\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $\int_2^6 g(x)\,dx$ (c) $\int_0^7 g(x)\,dx$



Mais exemplos

Exercício

Use as propriedades das integrais para verificar a desigualdade sem calcular as integrais:

$$\int_0^4 (x^2 - 4x + 4)\, dx \geqslant 0$$

$$\int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant \int_0^1 \sqrt{1 + x}\, dx$$

$$2 \leqslant \int_{-1}^1 \sqrt{1 + x^2}\, dx \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,\pi}{24} \leqslant \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos x\, dx \leqslant \frac{\sqrt{3}\,\pi}{24}$$