MAT 0143

Aula 17/ 12/05/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo:

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Equação** $y' = ky + b$.
3. Intervalos de crescimento e decrescimento
4. **Teorema do valor médio**
5. **Teorema do valor intermediário**
6. **Existência de um máximo e mínimo globais para** f **contínua em** $[a,b]$
7. **Primitivas de uma função** $f(x)$

Derivadas e formas indeterminadas: a regra de L'Hôspital

Teorema

Vamos supor que f e g têm derivadas e que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ ou } \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

onde a pode ser um número real finito, $+\infty$ ou $-\infty$, então:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Como mostrar o teorema: caso facil onde f' é contínua: simplesmente observar que $f(x) \simeq f(a) + f'(a).(x-a)$ perto de a.

Exemplos

Exercício

Com a regra de L'Hôpital, estudar:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen} x}{x}$
2. $\lim_{t\to 1} \frac{5t^4-4t^2-1}{10-t-9t^3}$
3. $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}$
4. $\lim_{x\to 0^+} x.\ln x$ *(pensar:* $f(x) = \frac{\ln x}{1/x}$*!)*
5. $\lim_{x\to-\infty} x.e^x$ *(que tentar?* $e^x/(1/x)$ *ou* x/e^{-x}*?)*
6. *Mais complicado:* $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ *(do tipo* ∞^0*).*

Limites e Regra de L'Hospital:

* $\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{1/x} = \lim_{x\to 1} -x = -1$

* $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3\,\text{sen}\, 3x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{9\cos 3x}{4} = \frac{9}{4}$

* $\lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+4}{3x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}$ sem L'Hospital

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{4x}{6x+1} = \lim \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$

Mais exemplos:

ⓐ $\lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2+7x}{5x^2+11}$ (Resp. $\frac{3}{5}$)

ⓑ $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{e^x}$ (Resp. 0)

ⓒ $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$ (Resp. 0)

Outras formas indeterminadas

Forma indeterminada $0.\infty$

ex: $\boxed{\lim_{x\to 0^+} x.\ln x^3}$ (escrever $x.\ln x$ como $\frac{\ln x}{1/x}$)

Praticar com: $\lim_{x\to\infty} x.\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$. (Resposta: 1)

$\lim_{x\to\infty} x.\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right)$ (Resp. 1).

$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$

Como fazer? $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

estudar $\ln y = x.\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x}$

e aplicar L'Hospital

Forma ∞^0

$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(e^x+x^2\right)^{2/x}}$ mesma ideia: tomar o logaritmo natural

(Resp. $=e^2$)

Problemas de otimização

Exercício

Encontre a área do maior retângulo que pode ser inscrito em um semicirculo de raio r.

Exercício

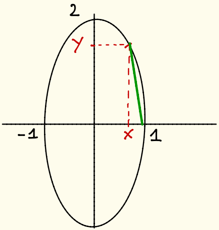
Encontreo os pontos sobre a elipse $4x^2 + y^2 = 4$ que estão mais distantes do ponto $(1, 0)$.

Prova: Escrever o quadrado da distança $d^2 = (x-1)^2 + y^2$ como uma função de x e encontrar os pontos criticos e aplicar o teste da derivada segunda. Calcular também os valores em -1 e 1 (lembra que $x \in [-1, 1]$).

Exercício

Area do maior retângulo inscrito na elipse $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Solução



$(\text{Dist.})^2$ entre $(1,0)$ e (x,y) é $= (x-1)^2 + y^2$

mas: $4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 4 - 4x^2$

então: $\underset{f(x)}{\underset{\parallel}{d^2}} = (x-1)^2 + 4 - 4x^2$

Agora: $f'(x) = 2(x-1) - 8x = -6x - 2$

núm. crítico: $-6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3}$.

$f''(x) = -6 < 0$

$*$ Teste da derivada segunda: $\frac{-1}{3}$ é máximo local

$*$ Vamos mostrar que $-\frac{1}{3}$ é máx. global:

$f: [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, temos: $f\left(\frac{-1}{3}\right) = \left(\frac{-1}{3} - 1\right)^2 + 4 - 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{16}{9} + \frac{36}{9} - \frac{4}{9} = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

$f(-1) = (-1-1)^2 + 4 - 4 = 4$

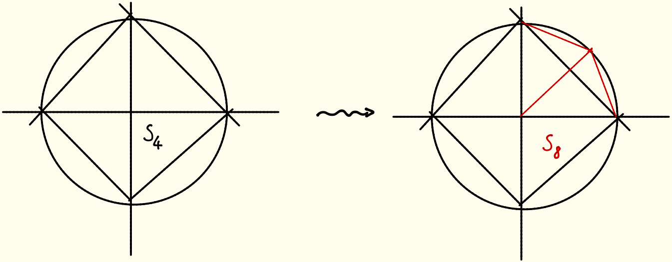
$f(1) = 0$.

Concl: $-\frac{1}{3}$ é o único máx. global.

Exercício

Maior volume de um cone de angulo α feito com um pedaço circular de papel, de raio R.

Problemas de area: como calcular a area de um disco?



Pergunta: qual é o limite S_∞ da seq. S_n?