MAT 0143

Aula 14/ 30/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo:

1. **Site:** `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
2. **Derivada de** sen, cos
3. **Regra da cadeia**
4. **Funções inversas**
5. **Derivada da função inversa**
6. **Logaritmos**

Derivada de $g = f^{-1}$

Teorema

Seja f uma função inversível, com função inversa g. Se f e g forem diferenciáveis, temos que

$$g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ para todos} x \in D_g$$

for derivável em $q = g(p)$, com $f'(q) \neq 0$, e se g for continua em p, então g será derivável em p.

Prova: temos que

$$f(g(x) = x.$$

Podemos tomar a derivada:

$$f'(g(x).g'(x) = 1 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Funções Logarítmicas

Observação: para $a > 1$, $x \mapsto a^x$ é continua e crescente (ou decrescente), então existe uma função inversa chamada *função logaritmíca com base a*, denotada por $\log_a$

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Propriedades I:

$$\log_a(a^x) = x \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$a^{\log_a x} = x \text{ para todo } x > 0$$

Propriedades II:

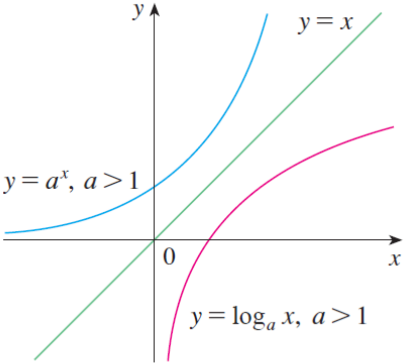
Teorema (Leis dos logaritmos)

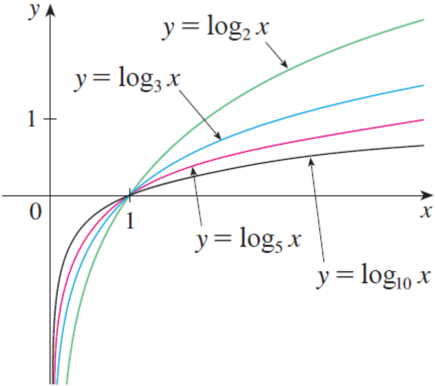
Se x e y forem > 0, então:

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a(x^r) = r.\log_a x$ *onde r é qualquer número real.*

Funções Logarítmicas II

Gráfico em relação à a^x:





Log e limites:

$$\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \text{ e também } \lim_{xto+\infty} \log_a x = +\infty$$

Logaritmos naturais

Definição: $\log_e x = \ln x$
Propriedades I:

$$\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$$
$$\ln(e^x) = x \text{ para } x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln x} = x \text{ para } x > 0$$

Propriedades II: "Mudança de base"

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \text{ para todo } a > 0, a \neq 1$$

Teorema (Logaritmos e derivadas)

1. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$,
2. *Para todo* $x \in (0, \infty)$ $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$
3. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x . \ln a$
4. $\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$

Exemplos

Exercício

Determine a derivada:

1. $y = e^{3x}.arc\text{sen}(2x)$
2. $y = x^2.e^{arctg(2x)}$.
3. $y = e^{-3x} + \ln(arctgx)$

Equações diferenciais

Definição

Uma equação diferencial é uma equação cuja incógnita é uma função y que aparece na equação também com as derivadas de y.

Exemplos: $y' = 3y + 1, y'' = -y, y.y' = 2y''$.
O primeiro teorema é muito intuitivo:

Teorema

As soluções da equação $y' = 0$ *num intervalo* (a, b) *são exatamente as funções constantes.*

Teorema

As soluções da equação $y' = k.y$ *num intervalo* (a, b) *são exatamente as funções*

$$y(t) = C.e^{kt}, \text{ onde } C \text{ é uma constante.}$$

Solução de $y' = ky$

Prova: E facil de ver que $y(t) = C.e^{kt}$ são soluções.
Agora seja $g(t)$ uma solução. Vamos definir uma nova função

$$h(t) = g(t).e^{-kt}$$

Então $h'(t) = g'(t).e^{-kt} + g(t)(-k.e^{-kt}) = kg(t)e^{-kt} - kg(t).e^{-kt} = 0$.
Isso implica que $h(t) = Constante = C$, e depois que $g(t) = C.e^{kt}$.

Exercício (Equação $y' = ky + b$)

1. *dar um exemplo de solução.*
2. *Mudar de variavel: escolher uma função simples do tipo $u = \alpha.y + \beta$ para obter uma nova equação do tipo $u' = K.u$*
3. *resolver a equação original.*

Aplicação: decaimento radioativo

Radioatividade: Um núcleo de um átomo vai se desintegrar de maneira espontânea, emitindo radiações (exemplo: emissão alfa, isto é, de uma particula alfa= 2 prótons e 2 nêutrons).
Fato experimental: a taxa de transformação de núcleos radioativos é proporcional ao número de átomos dos núcleos. Aqui $N(t)$ é o número de particulas (função do tempo):

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda.N(t)$$

Resolução da equação:

$$N(t) = C.e^{-\lambda.t} = N_0.e^{-\lambda.t}$$

"Vida média" de um elemento: é definida como $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$. E o tempo depois do qual a quantidade N de particulas se reduziu á metade. Isto é:

$$N(\tau) = \frac{N_0}{2}$$

Decaimento II

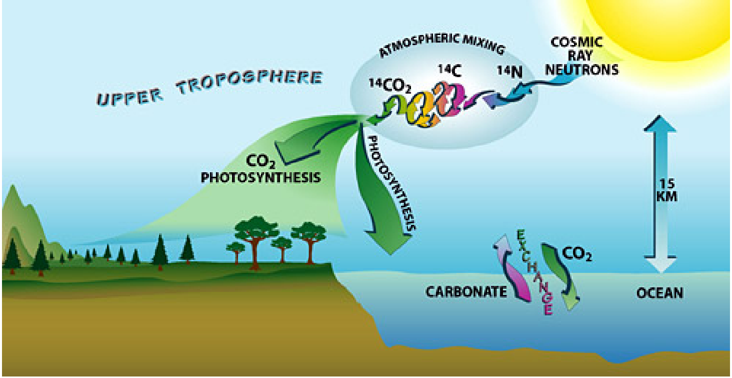
Mas ja sabemos que: $N(\tau) = N_0.e^{-\lambda.\tau}$ então $N_0/2 = N_0.e^{-\lambda.\tau} \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda.\tau}$. Podemos tomar o logaritmo natural:

$$\ln(1/2) = -\ln 2 = -\lambda.\tau \Rightarrow \tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Exemplos:para Carbono C^{14}, $\tau = 5730$ anos.

Aplicação:Datação por radiocarbono

Fato 1: A atmosfera contem uma proporção constante de $14 - C$.



Fato 2: plantas vivas contem uma proporção constante de $14 - C$ radioativo.

$$\underset{\text{Carbon dioxide}}{6CO_2} + \underset{\text{Water}}{6H_2O} \xrightarrow{\text{Light}} \underset{\text{Sugar}}{C_6H_{12}O_6} + \underset{\text{Oxygen}}{6O_2}$$

Aplicação:Datação por radiocarbono 2

A planta vai morrer: a fotossíntese para, e a quantidade de $14 - C$ dentro da planta vai diminuir (decaimento radioativo)
Consequência: seja N_1 a quantidade que a planta deveria conter, e N_r a quantidade real.

$$N_r = N_1.e^{-\lambda.t} \Rightarrow t = 1\frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{N_r}{N_1}\right)$$

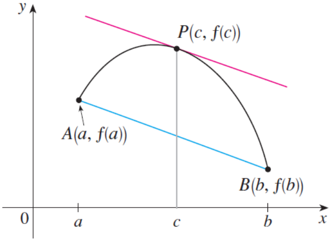
Estudo da variação das funções

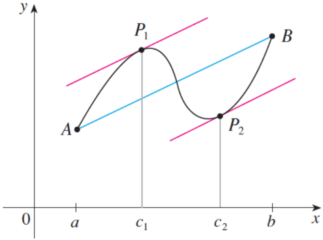
Objetivo: dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, queremos cortar $\mathbb{R}$ em intervalos (a, b) onde f é crescente ou decrescente.

Teorema (Teorema do valor médio)

Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existirá pelo menos um $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c).(b - a)$$





Intervalos de crescimento e de decrescimento

Teorema

Seja f contínua no intervalo I

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente crescente em I,*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo x interior a I, então f será estritamente decrescente em I.*

Demonstração: Vamos mostrar o primeiro caso: sejam $s < t$. Então existe $c \in (s, t)$ tal que $f(t) - f(s) = f'(c).(t - s) > 0$.

Exercício

Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento e esboce o gráfico:

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
2. $f(x) = x + \frac{1}{x}$
3. $x = \frac{t}{1+t^2}$
4. $f(x) = (\ln x)/x$

Dois teoremas sem demonstrações

Teorema (do valor intermediário)

Se f for contínua em $[a,b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c in$]a,b[$ tal que $f(c)=\gamma$.

Consequência importante: se $f(a)<0, f(b)>0$ e f contínua em $[a,b]$ então existe $\gamma \in]a,b[$ tal que $f(\gamma)=0$.

Teorema

Se f for contínua em $[a,b]$ então exisirão x_1 e x_2 em $[a,b]$ tais que $f(x_1)\leq f(x)\leq f(x_2)$ para todo $x\in[a,b]$. (Isto é $f(x_1)$ é o valor mínimo de f em $[a,b]$, e $f(x_2)$ é o valor máximo)

Mais consequências do teorema do valor medio

Exercício ($e^x \to \infty$ mais rapidamente que x)

1. *Mostrar* $e^x > x$ *para todo* $x \geq 0$
2. *Mostre que* $e^x > (x^2)/2$ *para todo* $x \geq 0$
3. *Mostre que* $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Exercício

Prove que a equação $x^3 - 3x^2 + 6 = 0$ *admite uma única raiz real. Determine um intervalo de amplitude 1 que contenha tal raiz.*

Máximo, mínimo local

Definição

1. *Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*
2. *Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x em algum intervalo aberto contendo c.*

Como reconhecer um máximo ou mínimo local para f derivavel:

Teorema

Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e $f'(c)$ existir, então $f'(c) = 0$.

Demonstração:

Definição

Um número crítico de uma função f é um número c no domínio de f tal que $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.

Exercícios

Exercício

Encontre os números críticos:

$$f(x) = 4 + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{2}x^2$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$$

$$f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$$

$$g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$$

$$g(t) = |3t - 4|$$

$$g(y) = \frac{y - 1}{y^2 - y + 1}$$

$$h(p) = \frac{p - 1}{p^2 + 4}$$

$$h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$$

$$g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$$

Máximo absoluto (ou global)

Definição

Uma função f tem máximo absoluto (ou máximo global) em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D_f$. O número $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D_f. Também f tem um mínimo absoluto em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D_f$, e o número $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D_f. Os valores máximo e mínimo de f são chamados valores extremos de f.

Como determinar os valores extremos de f contínua em $[a, b]$ fechado:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b);
2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo (isto é, em a e b);
3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto, e o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Encontre os valores máximo e mínimo locais e absolutos de f

Exercício

$$f(x) = \tfrac{1}{2}(3x - 1), \quad x \leqslant 3$$

$$f(x) = 2 - \tfrac{1}{3}x, \quad x \geqslant -2$$

$$f(x) = 1/x, \quad x \geqslant 1$$

$$f(x) = 1/x, \quad 1 < x < 3$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 \leqslant x < \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad 0 < x \leqslant \pi/2$$

$$f(x) = \sin x, \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$$

$$f(t) = \cos t, \quad -3\pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$$

$$f(x) = \ln x, \quad 0 < x \leqslant 2$$

$$f(x) = |x|$$