MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 11/ Segunda 07/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

Resumo Aula 10

1. Informações gerais:
   - **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte `http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html`
   - **Importante: Monitoria:** quarta-feira, 14:00 as 16:00, no queijino amarelo para tudo o resto do semestre (a sala da monitoria mudou).
   - **Novo no site:** Lista de tópicos para Prova 1 atualizada (isto é, tem menos material...).
   - **Prova 1:** Lembra que : A prova P1 é no dia Quarta 09/04, horario habitual, sala habitual (isto é: 16:00 até 18:00, Bloco 16- Sala de Aula)

---

2. **Leis do limite**
3. **Assíntotas**
4. **Definição da derivada** $f'(a)$

Vamos começar com uma revisão para a prova 1

Vamos praticar:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x}-1}{x}$. Podemos tentar uma mudança de variavel: $U=\sqrt[3]{1+3x} \Longrightarrow U^3=1+3x$
$\Longrightarrow x=\frac{U^3-1}{3}$

Agora: $x\to 0 \Rightarrow U\to 1$

Então o limite é: $\lim_{U\to 1} \frac{U-1}{U^3-1}\cdot 3$

Mas: $U^3-1=(U-1)(U^2+U+1)$, então $\frac{3(U-1)}{U^3-1}=\frac{3}{U^2+U+1} \xrightarrow[U\to 0]{} \frac{3}{3}=1.$

Mesma idéia: $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ Podemos fazer $U=\sqrt[3]{x}$ e $U^3=x$.

O limite é agora: $\lim_{U\to 0} \frac{U-1}{U^{3/2}-1} \longrightarrow \frac{-1}{-1}=1.$

<u>Observação</u>: depois, com as derivadas, a gente vai ver que o primeiro limite é $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{1+3x}$ no ponto $x=0$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+1}-x}$$

Vamos escrever: $\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)\cdot\dfrac{\left(\sqrt{x^2+4x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \dfrac{\cancel{x^2}+4x+1-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \dfrac{4\cancel{x}\left(1+\frac{1}{4x}\right)}{\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{4x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \longrightarrow \dfrac{1}{2}.$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{x-x^2}$$

Temos: $e^{x-x^2} = \dfrac{1}{e^{x^2-x}} = \dfrac{1}{e^{x^2\left(1-\frac{x}{x^2}\right)}}$

Então: $x^2\left(1-\frac{1}{x}\right) \longrightarrow +\infty$ e $e^{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)} \longrightarrow +\infty$

mas agora: $\dfrac{1}{e^{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Lembra: $a>1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$

Revisão para a prova: 3

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}$$

Reduzir tudo no mesmo denominador:

$$x^2-3x+2 = (x-1)(x-2) \Longrightarrow f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}\cdot\left(1+\frac{1}{x-2}\right)$$

$$= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-2+1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{\cancel{x-1}}\cdot\frac{\cancel{x-1}}{x-2} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{1}{1-2}$$

$$= -1$$

Fazer o mesmo com: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2}$!

$$\boxed{\text{Assíntotas horizontais de } y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}}$$

Em $+\infty$: $\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{(\cancel{x^2}+x+1)-(\cancel{x^2}-x)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x}}$

$$=\frac{2x+1}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}+|x|\cdot\sqrt{1-\frac{x}{x^2}}}$$

$$=\frac{2+1/x}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\longrightarrow\frac{2}{2}=1$$

Então: $y=1$ é uma assintota horizontal.

Em $-\infty$:

Fazer o mesmo e obter um limite $=\dfrac{2}{-2}=-1\Rightarrow y=-1$ é assíntota horizontal.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\cos^2 x).(\operatorname{sen}^2 x)}{x^4}$$

Vamos escrever: $\underbrace{\cos^2 x}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{+\infty} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

Questão: que dizer de $\lim_{x \to 0^-}$?

Outros ex. do mesmo tipo: $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 6x}{\operatorname{sen} 2x}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} x^2 . \sqrt{1+x^2} . \cos(7x).$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{2(x^3-64)}{\sqrt{x}-2}$$

Vamos escrever: $\dfrac{2(x^3-64)}{\sqrt{x}-2} \cdot \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \dfrac{2(x^3-4^3)}{x-4} \cdot (\sqrt{x}+2)$

agora: $x^3-4^3 = (x-4)(x^2+4x+16)$

então: $F(x) = 2(x^2+4x+16)\cdot(\sqrt{x}+2) \longrightarrow 2\cdot(4^2+4^2+16)\cdot(2+2) = 368.$

Assíntotas verticais de $y = \dfrac{2x+1}{x^2-2x-8}$

O denominador é $=0$ somente em $x=-2$ e $x=4$.

Em $x=-2$: $F(x) = \underbrace{\dfrac{2x+1}{x-4}}_{\substack{x\to -2^+ \\ -3/-6 = 1/2}} \cdot \dfrac{1}{x-2} \xrightarrow{x\to 2^+} +\infty$ então $x=-2$ é assíntota vertical

Em $x=4$: fazer o mesmo e ver que $x=4$ é assíntota vertical.

Voltando no material novo: reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando pelo ponto P e com inclinação

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Equação:

$$\boxed{y - f(p) = f'(p).(x - p)}$$

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, em qualquer ponto P da curva.

Derivada

Definição

A derivada de uma função f em um número a, denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \to 0$ implica $x \to a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a)Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x-1)/(x-2)$ no ponto $(3,2)$.b)Se $G(x) = x/(1+2x)$, encontre $G'(a)$

Interpretações da derivada

Velocidade: A variavel t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a+h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é , como um limite de velocidades médias).

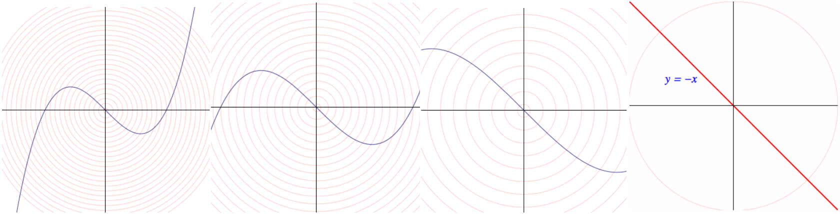
Exemplo: queda livre, sem velocidade initial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81 m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton apoś a morte de Leibniz declarou: ”me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz”.

Mais uma interpretação da reta tangente

Ideia: "a reta tangente é o que você vai obter depois de fazer um zoom infinito perto do ponto $(a, f(a))$. (= olhar com um microscópio o gráfico) **Exemplo:** vamos considerar $f(x) = x(x-1(x+1)$



Demonstração: vamos fazer um "zoom" (isto é, um esticamento horizontal e vertical, com o mesmo fator $c \to \infty$)

$$y = c.f(\frac{x}{c}) \Rightarrow y = c.\frac{x}{c}.(\frac{x}{c} - 1).(\frac{x}{c} + 1) \to -x$$

Interpretação da derivada

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondante em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\boxed{\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)}$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal Cmg** é:

$$Cmg = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais o menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

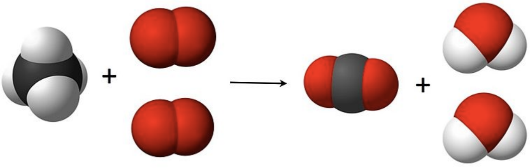
$$M = \frac{n}{V},$$

onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em $0,012$ quilograma de carbono-12". Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^2 3$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro"). Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos $0,3$ mol de água. **Notação:** concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Equação química: uma representação de uma reação química

$$(Reagentes) \to (Produtos)$$

Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e colocar coeficientes)



$$CH_4 + 2O_2 \longrightarrow CO_2 + 2H_2O$$

Metano + oxigénio $\to$ dióxido de carbono + agua + muito calor

Concentrações:dado $A + B \to C$, $[A], [B], [C]$ são funções do tempo t. A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.
Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação } = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:

$$aA + bB \to pP + qQ$$

a **taxa de reação é:**

$$v = -\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b}\frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p}\frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q}\frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Química e equações diferenciais

Exemplo:$aA \rightarrow Produtos$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e: $-\frac{1}{a}\frac{d[A]}{dt} = k[A]$).
Este tipo de equação é chamado "equação diferencial". No fim do semestre a gente vai poder resolver o exercicio seguinte sem problemas.

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ e $f(t) = 0$ para todos t implica f constante). (Resposta: $[A] = [A]_0.e^{-akt}$)

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a,b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em $\mathbb{R}$.

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) = n.x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0,\infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{3}$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(t) = 5t - 9t^2$$

$$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$$

$$f(x) = x^2 - 2x^3$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$g(x) = \sqrt{9 - x}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$$f(x) = x^{3/2}$$

$$f(x) = x^4$$