

MAT 0143 : Cálculo para Ciências Biológicas

Aula 10/Quarta 02/04/2014

Sylvain Bonnot (IME-USP)

2014

1 Informações gerais:

- **Site:** o link do MAT 0143 na pagina seguinte
<http://www.ime.usp.br/~sylvain/courses.html>
- **Monitoria:** quarta-feira, 14:00 as 16:00, na sala "Lilás" do predio dos "Queijinhos".
- **Novo no site:**Lista 3, com respostas + Lista de tópicos para Prova 1.
- **Prova 1:** Lembra que : A prova P1 é no dia Quarta 09/04, horario habitual, sala habitual (isto é: 16:00 até 18:00, Bloco 16- Sala de Aula)

2 Limites no infinito: leis do limite

3 Leis do limite

4 Assíntotas

Leis do limite no caso infinito: somas e produtos

Somas:

- 1 $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$
- 3 $L + (+\infty) = +\infty$, se $L \in \mathbb{R}$
- 4 $L + (-\infty) = -\infty$, se $L \in \mathbb{R}$

Produtos:

- 1 $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$
- 2 $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
- 3 $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$
- 4 $L \cdot (+\infty) = +\infty$, se $L > 0$
- 5 $L \cdot (+\infty) = -\infty$, se $L < 0$
- 6 $L \cdot (-\infty) = -\infty$, se $L > 0$
- 7 $L \cdot (-\infty) = +\infty$, se $L < 0$

Indeterminações: nos casos seguintes, a gente tem que trabalhar mais:

$$+\infty - (+\infty), -\infty - (-\infty), 0 \cdot \infty, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, 1^\infty, 0^0, \infty^0.$$

Formas indeterminadas: que fazer?

Lembra: forma indeterminada não significa que não podemos calcular o limite!

Exemplos do tipo $\infty - \infty$: somente (3) e (4)

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+9} - \sqrt{x+4}) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+25} - \sqrt{x^2-1}) \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+3} + x) \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x + \sqrt{4x^2+3x-2}) \\ & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2-x} - 3x) \end{aligned}$$

Exemplos do tipo $\frac{0}{0}$:

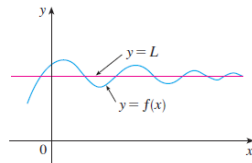
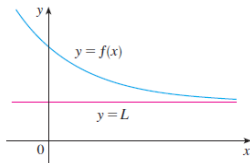
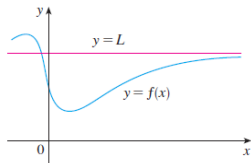
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x}, \text{ ou por exemplo } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1/x) + (3/x^2)}{(5/x) + (\operatorname{sen} x/x^3)}$$

Assíntota horizontal:

Definição

A reta horizontal $y = L$ é chamada assíntota horizontal da curva $y = f(x)$ se ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$



Assíntotas verticais

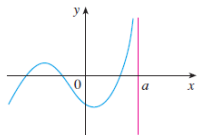
Assíntota vertical:

Definição

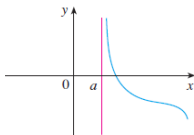
A reta vertical $x = a$ é chamada assíntota vertical da curva $y = f(x)$ se pelo menos uma das seguintes condições estiver satisfeita

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$$

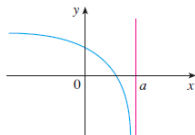
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



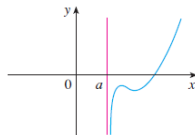
(a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty$



(b) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$



(c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$



(d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$

Exercício

Encontre as assíntotas horizontais de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Como trabalhar com limites infinitos: quocientes

Teorema

Suponha que $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = 0$ e que existe $r > 0$ tal que $f(x) > 0$ para $p < x < p + r$. Então:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

Exemplo (importante): Para qualquer numero real $r > 0$ temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^r} = +\infty$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-4}{x+2}$$

Exercício

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{(4-x)^3} \text{ e } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{(x-3)}$$

Exemplos de assíntotas verticais

Exercício

Agora, encontre as assíntotas verticais de cada curva.

$$y = \frac{2x + 1}{x - 2}$$

$$y = \frac{x^2 + 1}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$y = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 + x - 2}$$

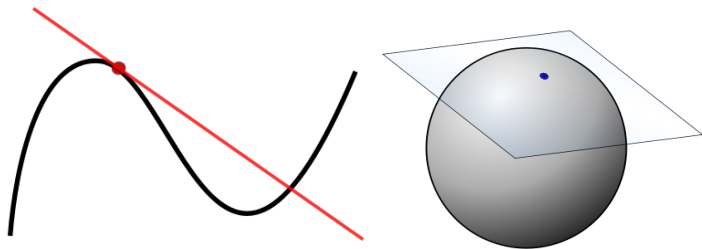
$$y = \frac{1 + x^4}{x^2 - x^4}$$

$$y = \frac{x^3 - x}{x^2 - 6x + 5}$$

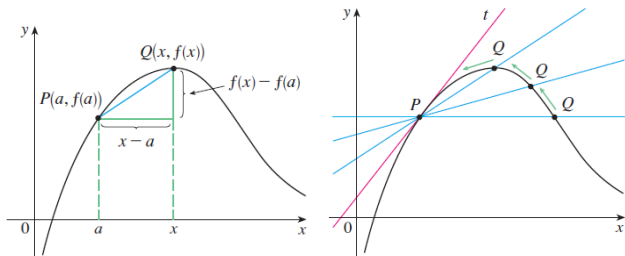
$$y = \frac{2e^x}{e^x - 5}$$

Tangentes

Ideia: "tangente", do latim *tangere* = tocar.



Posição limite de uma reta passando pelo ponto P:



Reta tangente a uma curva

Definição

A reta tangente a uma curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando pelo ponto P e com inclinação

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que esse limite exista.

Exemplo:

Exercício

tangente na curva $y = x^3$ no ponto $(1, 1)$.

Exemplo onde a tangente não existe:

Exercício

Estudar as tangentes para a curva $y = |x|$, em qualquer ponto P da curva.

Definição

A derivada de uma função f em um número a , denotada por $f'(a)$ ("f linha de a") é

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

se o limite existe.

Definição equivalente: podemos fazer $x = a + h$, então $h = x - a$ e $h \rightarrow 0$ implica $x \rightarrow a$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exercício

a) Encontre uma equação da reta tangente à curva $y = (x - 1)/(x - 2)$ no ponto $(3, 2)$. b) Se $G(x) = x/(1 + 2x)$, encontre $G'(a)$

Interpretações da derivada

Velocidade: A variável t é o tempo, e $t \mapsto f(t)$ é a função posição de um objeto. Entre $t = a$ e $t = a + h$, a variação na posição é de $f(a + h) - f(a)$, e

$$\text{velocidade média} = \frac{\text{deslocamento}}{\text{tempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Conseqüência: a derivada $f'(a)$ pode ser interpretada como uma velocidade instantânea (isto é, como um limite de velocidades médias).

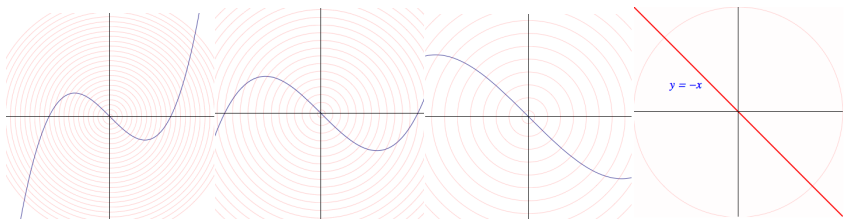
Exemplo: queda livre, sem velocidade inicial: Posição vertical: $y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$, e velocidade $v = -gt$, onde g é aceleração causada pela gravidade ($g \simeq 9,81m/s^2$).

Notação: $f'(a)$ (notação de Lagrange), $\frac{df}{dx}(a)$ (de Leibniz), $\dot{f}(a)$ (de Newton)

Newton após a morte de Leibniz declarou: "me sinto muito feliz por ter desfeito o coração de Leibniz".

Mais uma interpretação da reta tangente

Ideia: "a reta tangente é o que você vai obter depois de fazer um zoom infinito perto do ponto $(a, f(a))$. (= olhar com um microscópio o gráfico) **Exemplo:** vamos considerar $f(x) = x(x - 1)(x + 1)$



Demonstração: vamos fazer um "zoom" (isto é, um esticamento horizontal e vertical, com o mesmo fator $c \rightarrow \infty$)

$$y = c.f\left(\frac{x}{c}\right) \Rightarrow y = c.\frac{x}{c}.\left(\frac{x}{c} - 1\right).\left(\frac{x}{c} + 1\right) \rightarrow -x$$

Interpretação da derivada

Taxa de variação instantânea: Para uma função $y = f(x)$, no intervalo $[x_1, x_2]$, a variação em x é $\Delta x = x_2 - x_1$, a variação correspondente em y é $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$. Finalmente:

$$\text{taxa de variação instantânea} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(a)$$

Economia: seja C o custo total de um produto, e Q a quantidade produzida. Então o **custo marginal C_{mg}** é:

$$C_{mg} = \frac{dC}{dQ}.$$

A ideia é que quando $\Delta x = 1$, mas Q muito grande (i.e muito maior que 1) temos que $C'(n) \simeq C(n+1) - C(n)$, isto é, o custo marginal de produção é mais ou menos igual ao custo de produção de mais uma unidade.

Concentração: é a razão da quantidade de matéria do soluto (mol) pelo volume de solução (em litros)

$$M = \frac{n}{V},$$

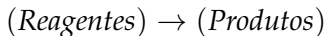
onde o mol é a unidade do Sistema SI de unidades. Isto é um mol é "a quantidade de matéria de um sistema que contém tantas elementos quanto são os átomos contidos em 0,012 quilograma de carbono-12".

Por exemplo, 1 mol de moléculas de um gás tem mais o menos $6,022 \times 10^{23}$ moléculas deste gás ("constante de Avogadro").

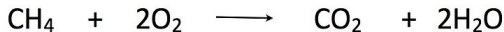
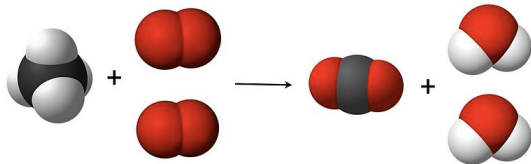
Outro exemplo: Uma colher de chá tem mais o menos 0,3 mol de água.

Notação: concentração do reagente A é denotada com colchete, por $[A]$.

Equação química: uma representação de uma reação química



Por causa da Lei de conservação da massa, tem que equilibrar (i.e. colocar coeficientes)



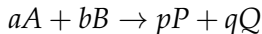
Metano + oxigénio \rightarrow dióxido de carbono + água + muito calor

Concentrações: dado $A + B \rightarrow C$, $[A]$, $[B]$, $[C]$ são funções do tempo t . A taxa média da reação do produto C no intervalo $[t_1, t_2]$ é $\frac{\Delta[C]}{\Delta t}$.

Taxa de reação instantânea:

$$\text{taxa de reação} = \frac{d[C]}{dt}$$

Caso mais geral: (condições: V constante) dada:



a taxa de reação é:

$$v = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = \frac{1}{p} \frac{d[P]}{dt} = \frac{1}{q} \frac{d[Q]}{dt}$$

Cinética química: a determinação experimental da taxa de reação r vai dar

$$r = k[A]^m[B]^n$$

(k constante de taxa de reação, mas pode depender por exemplo de T).

Exemplo: $aA \rightarrow \text{Produtos}$ no caso de uma reação de ordem 1 (i.e.: $-\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = k[A]$).

Exercício

Resolver (podemos supor: $\frac{de^t}{dt} = e^t$ e $f(t) = 0$ para todos t implica f constante). (Resposta: $[A] = [A]_0 \cdot e^{-akt}$)

Derivadas como funções

Definição

Uma função f é diferenciável em a se $f'(a)$ existir. É diferenciável em um intervalo aberto (a, b) se for diferenciável em cada número do intervalo.

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^2$ é diferenciável em \mathbb{R} .

Exercício

Mostrar que $x \mapsto x^3$ é diferenciável em \mathbb{R} .

Exercício

Mostrar que $f(x) = x^n$ (onde $n \in \mathbb{N}$) é diferenciável em \mathbb{R} e tal que $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

Exercício

Mostrar que $g(x) = \sqrt{x}$ é diferenciável em $(0, \infty)$ e tal que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Exercícios com derivadas

Exercício

Encontre a derivada da função usando a definição. Estabeleça os domínios da função e da derivada.

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$$

$$f(t) = 5t - 9t^2$$

$$f(x) = x^2 - 2x^3$$

$$g(x) = \sqrt{9 - x}$$

$$G(t) = \frac{1 - 2t}{3 + t}$$

$$f(x) = x^4$$

$$f(x) = mx + b$$

$$f(x) = 1.5x^2 - x + 3.7$$

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x - 3}$$

$$f(x) = x^{3/2}$$

Lista de tópicos para Prova 1

- 1 **Funções:** transformações de gráficos (por exemplo: translações, ...)
- 2 **Funções quadráticas, complemento de quadrado.**
- 3 **Desigualdades, valor absoluto:** não vai ter exercícios com desigualdades, mas a gente precisa da definição de $|x|$.
- 4 **Funções exponenciais e potências:** propriedades básicas.
- 5 **Limites:** definição rigorosa de $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e de $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.
- 6 **Limites:** leis do limite, formas indeterminadas.
- 7 **Exemplos de limites:** funções contínuas, polinômios, frações racionais
- 8 **Limites e funções compostas**
- 9 **Limites no ∞ :** polinômios, frações racionais, funções com raízes, etc ...
- 10 **Limites e funções trigonométricas** do tipo $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}x}{x}$.
- 11 **Assíntotas**
- 12 **Exemplos de limites do tipo $\infty - \infty$:** exemplo
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + bx} - \sqrt{x^2 + ax}$$
- 13 **Derivadas:** definição de $f'(a)$, determinação da equação da reta tangente 22