Prova P3:

1. Derivadas parciais
2. planos tangente e aproximações lineares
3. regra da cadeia
4. derivadas e função implicita
5. equ. diferenciais parciais
6. derivadas direcionais
7. vetor gradiente
8. formula de Taylor e máximos, mínimos (somente até o material da aula da segunda 17/11/2014)

Resumo:

Condição suficiente para um ponto crítico ser um extremo local:

Definição: * matriz hessiana de f $= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

* "hessiano" $H(x,y)$: é o determinante da matriz hessiana

isto é: $H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2 = rt - s^2.$

Teorema:

Sejam f de classe C^2 e (x_0,y_0) um ponto interior de D_f. Suponhamos que (x_0,y_0) seja ponto crítico de f. Então:

ⓐ Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$. Então (x_0,y_0) será ponto de mínimo local de f.

ⓑ Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$. Então (x_0,y_0) será ponto de máximo local de f.

ⓒ Se $H(x_0,y_0) < 0$ então (x_0,y_0) não será extremo local, mas será ponto de sela.

ⓓ Se $H(x_0,y_0) = 0$, podemos afirmar nada.

Diagonalização e teste da derivada segunda

Teorema

Seja A uma matriz real, simetrica. Então existe uma matriz ortogonal P tal que

1. $P^{-1}AP = D$, *matriz diagonal*
2. *as entradas de D são os autovalores de A,*
3. *as colunas de P são os autovetores associados.*

Exercício

Mostre que a forma quadrática $X \mapsto X^t.A.X$ pode ser escrita como $X' \mapsto X'^t.D.X'$ depois da mudança de base dada por $X = P.X'$.

Valor extremo em dimensão 2

Teorema (Teorema do valor extremo para as funções de duas variáveis)

Se f for contínua em um conjunto fechado e limitado $D \subset \mathbb{R}^2$, então f assume um valor máximo absoluto $f(x_1, y_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(x_2, y_2)$ em alguns pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) de D.

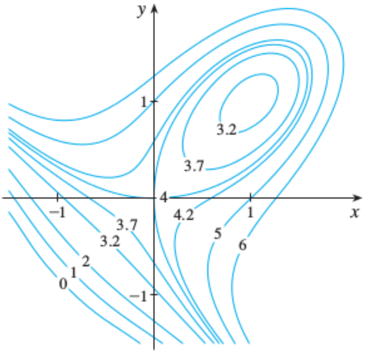
Como determinar os valores máximo e mínimo absolutos:

1. determine os valores de f nos pontos críticos de f em D.
2. determine os valores extremos de f na fronteira de D.
3. O maior dos valores dos passos 1 e 2 é o valor máximo absoluto; o menor desses valores é o valor mínimo absoluto.

Exercício

Utilize as curvas de nível para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada desses pontos. Utilize o Teste da Segunda Derivada para confirmar o resultado.

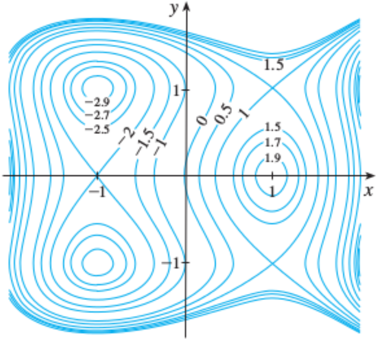
$$f(x, y) = 4 + x^3 + y^3 - 3xy$$



Exercício

Utilize as curvas de nível para predizer a localização dos pontos críticos de f e se f tem um ponto de sela ou um máximo ou mínimo local em cada desses pontos. Utilize o Teste da Segunda Derivada para confirmar o resultado.

$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4$



Máximo e mínimo absoluto III

Exercício

Determine os valores máximo e mínimo absolutos de f no conjunto D.

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2 y + 4,$$
$$D = \{(x, y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$$

$$f(x, y) = 4x + 6y - x^2 - y^2,$$
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 4, 0 \leqslant y \leqslant 5\}$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2,$$
$$D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 3, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$$

$$f(x, y) = xy^2, \quad D = \{(x, y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, x^2 + y^2 \leqslant 3\}$$

$$f(x, y) = 2x^3 + y^4, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

Extremos em dimensão 2 $\neq$ extremos em dim. 1

Exercício

Mostre que a seguinte função só tem dois pontos críticos, ambos de máximo local:

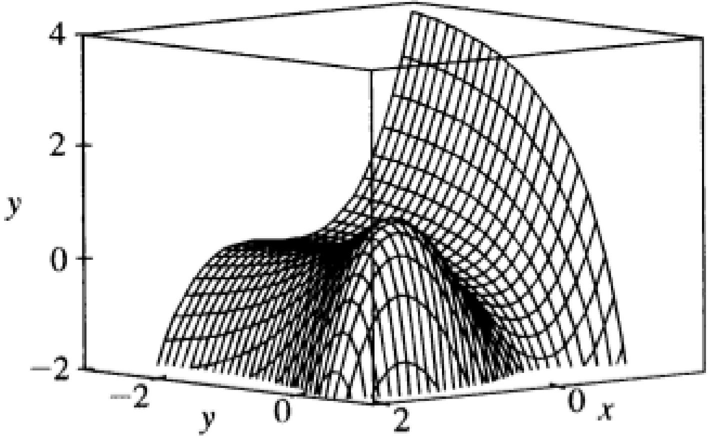
$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2.$$

Exercício

Mostre que a seguinte função tem exatamente um ponto crítico, onde f tem um máximo local, mas este não é um máximo absoluto:

$$f(x, y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}.$$

Gráfico do exemplo 2



Método dos mínimos quadrados: regressão linear

Exercício

Seja $(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$ *uma coleção de pontos no plano (por exemplo, resultados de uma experiência). Encontre a reta* $y = mx + b$ *que seja a melhor aproximação, no seguinte sentido: essa reta minimiza a soma* S *dos quadrados dos desvios verticais* $d_i := y_i - (mx_i + b)$*,i.e*

$$S = \sum_{i=1}^{n} d_i^2.$$

De maneira mais precisa, mostre que a reta de melhor ajuste é obtida quando:

1. $m \sum x_i + bn = \sum y_i$
2. $m \sum x_i^2 + b \sum x_i = \sum x_i y_i$

Exercício

Menor distância entre o ponto $(2,1,-1)$ *e o plano* $x+y-z=1$*?*

Exercício

Pontos da superfície $z^2 = x^2 + y^2$ *mais próximos do ponto* $(4,2,0)$*?*

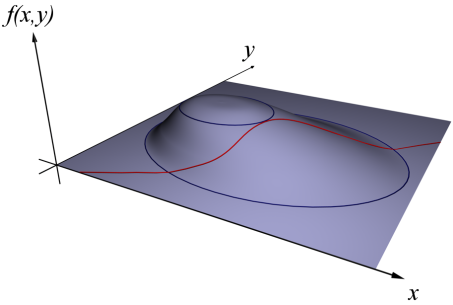
Exercício

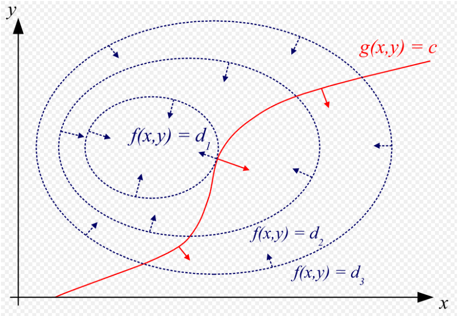
Determine três números positivos cuja soma é 100 e cujo produto é maximo.

Exercício

Encontre o volume da maior caixa retangular no primeiro octante com 3 faces nos planos de coordenadas e com um vértice no plano $x+2y+3z=6$*.*

Multiplicadores de Lagrange





Para achar os valores extremos de $f(x,y)$ **sujeitos à restrição** $g(x,y) = k$**:** temos que resolver o sistema:

1. $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$
2. $g(x,y) = k$

Multiplicadores de Lagrange: exemplos

$$f(x,y) = x^2 + y^2; \quad xy = 1$$

$$f(x,y) = 3x + y; \quad x^2 + y^2 = 10$$

$$f(x,y) = y^2 - x^2; \quad \tfrac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$$

$$f(x,y) = e^{xy}; \quad x^3 + y^3 = 16$$