Máximo, mínimo para $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

&

Formulas de Taylor

17/11/2014

S. Bonnot

Resumo: Formula de Taylor em dimensão 1.

Formula geral:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^n + E_n(x)}$$

Formula com resto integral:

Teorema:

Seja f tal que f'' seja contínua num intervalo aberto I contendo a.

Então, $\forall x \in I$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + E_1(x), \text{ onde } E_1(x) = \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt.$$

Demonstração:

$$E_1(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) = \int_a^x f'(t)\,dt - f'(a).\int_a^x dt = \int_a^x (f'(t) - f'(a))\,dt$$

Vamos calcular essa integral com uma integração por partes.

Integração por partes: $\int_a^x (f'(t)-f'(a))\,dt = E_1(x)$

$$\begin{cases} u = f'(t)-f'(a) & \Rightarrow du = f''(t)\,dt \\ dv = 1.\,dt & \Rightarrow v = t-x. \end{cases}$$

Então $E_1(x) = u.v\Big]_a^x - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt = 0-0-\int_a^x (t-x) f''(t)\,dt = \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt.$

Generalização:

<u>Teorema:</u>

Seja f tal que $f^{(n+1)}$ seja contínua num intervalo $I \ni a$. Então, $\forall x \in I$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + E_n(x), \text{ onde } E_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

Dem.: Por indução:

① Caso $n=1$ (ver acima).

② Vamos supor que a formula é verdadeira para n, e vamos mostrar ela para $n+1$:

temos que $$E_{n+1}(x) = E_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\underbrace{\int_a^x (x-t)^n dt}_{=\frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1}}$$

Então $$E_{n+1}(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt - \frac{f^{(n+1)}(a)}{n!}\int_a^x (x-t)^n dt$$

$$= \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \left[f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a)\right] dt$$

Agora: Integração por partes:

$$\begin{cases} u = f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(a) \Rightarrow du = f^{(n+2)}(t) \\ dv = (x-t)^n \qquad \Rightarrow v = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_{n+1}(x) = \underbrace{u.v\Big]_a^x}_{0 = 0} - \frac{1}{n!}\int_a^x v\,du = \frac{1}{(n+1)!}\int_a^x (x-t)^{n+1}.f^{(n+2)}(t)\,dt.$$ (Fim da demonstração).

Outra expressão do Resto (i.e "Resto de Lagrange"):

> **Lema:** Sejam f, g contínuas em $[a,b]$. Se o sinal de g fica o mesmo, então:
>
> $$\exists\, c \in [a,b] \text{ tal que } \int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c).\int_a^b g(x)\,dx$$

Dem.: vamos supor $g(x) \geq 0$. Sabemos: $m \leq f(x) \leq M$, então $m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x)$

$$\Longrightarrow m\int_a^b g \leq \int_a^b f.g \leq M\int_a^b g.$$

Se $\int_a^b g = 0$, $g = 0$ e o lema é verdadeiro. Se não: $m \leq \frac{\int fg}{\int g} \leq M$ $\Longrightarrow$ (T. valor int.) $\exists\, c,\ f(c) = \frac{\int f.g}{\int g}$.

Consequência:

podemos escrever $E_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_a^x (x-t)^n \cdot f^{(n+1)}(t)\, dt$ como $f^{(n+1)}(c) \cdot \int_a^x (x-t)^n\, dt$

isto é: $\boxed{E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.}$

Teorema:

Suponhamos $m \leq f^{(n+1)}(t) \leq M$, então:

$$\boxed{m \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \leq E_n(x) \leq M \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{se } x > a}$$

$$\boxed{m \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!} \leq (-1)^{n+1} E_n(x) \leq M \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \text{se } x < a.}$$

Exemplo:

$x \mapsto e^x = f(x)$ é tal que: ① $f^{(n+1)}(x) = e^x \in [1, e]$ se $x \in [0,1]$.

Então: $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant E_n(x) \leqslant e \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant 3 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ (lembra: $e \simeq 2{,}72 \leqslant 3$).

Em particular:

$$\frac{1}{(n+1)!} \leqslant E_n(1) \leqslant \frac{3}{(n+1)!}, \text{ isto é: } \frac{1}{(n+1)!} \leqslant e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{n+1} \leqslant n!\, e - \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} < \frac{3}{n+1} \leqslant \frac{3}{4} \text{ se } n \geqslant 3.$$

Teorema:

e é irracional (i.e $\nexists$ p, q inteiros tal que $e = \frac{p}{q}$).

Demo.: por contradição:

Vamos supor $e = \frac{p}{q}$. Então: $\frac{1}{q+1} \leqslant \underbrace{q!\, e - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{} < \frac{3}{4}$

isso é um inteiro, >0, então não pode ser $<\frac{3}{4}$!!

Formula de Taylor em dimensão ≥ 2:

Teorema:

Seja f tal que as derivadas da segunda ordem $\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}$ sejam contínuas numa bola aberta $B(a)$.

Então $\forall y \in \mathbb{R}^n$ tal que $a+y \in B(a)$, temos:

$$f(a+y)-f(a)=\nabla f(a).y+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(a)\,y_i y_j+\|y\|^2 E_2(a,y),$$

onde $E_2(a,y) \longrightarrow 0$ quando $y \to 0$.

Exemplo:

$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, então $$f(a_1+y_1, a_2+y_2)-f(a_1,a_2)=\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)y_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}(a)y_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(a)y_1^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(a)y_1y_2+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(a)y_2^2\right)$$

$$+\left(y_1^2+y_2^2\right)E_2(a,y).$$

Formula de Taylor com resto de Lagrange:

Teorema:

Seja $f(x,y)$ de classe C^2 no aberto $A \subset \mathbb{R}^2$ e sejam $(x_0,y_0) \in A$ e $(h,k) \neq 0$ tais que o segmento de extremidades (x_0,y_0) e $(x_0+h, y_0+k) \subset A$.

Então:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k + E(h,k)$$

onde:

$$E(h,k) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x},\bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})k^2\right],$$

para algum ponto $(\bar{x},\bar{y})$ do segmento de extremidades (x_0,y_0) e (x_0+h, y_0+k).

Demonstração:

como sempre, vamos utilizar Cálculo 1 e parametrizar o segmento entre (x_0,y_0) e (x_0+h, y_0+k)

isto é, estudar $t \mapsto g(t) = f(x_0+ht, y_0+kt)$, $t \in [0,1]$.

Demonstração: lembra da formula de Taylor com resto de Lagrange em dimensão 1:

$$g(1) = g(0) + g'(0)\cdot(1-0) + \frac{g''(\bar{t})}{2}(1-0)^2 \text{ para algum } \bar{t} \in (0,1).$$

$\boxed{\text{Cálculo de } g'(t):}$

$$g'(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k, \text{ onde } x = x_0 + th,\ y = y_0 + tk.$$

$\boxed{\text{Cálculo de } g''(t):}$

$$g''(t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h\right)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)h\right)k + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k\right)h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)k\right)k$$

$$g''(t) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)k^2.$$

$\boxed{\text{Conclusão:}}$

$$\underset{g(1)}{\underset{\parallel}{F(x_0+h, y_0+k)}} = \underset{g(0)}{\underset{\parallel}{F(x_0,y_0)}} + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)k}_{\underset{g'(0)}{\parallel}} + \underbrace{E(h,k)}_{\underset{\frac{1}{2}g''(\bar{t})}{\parallel}}$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y})h^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(\bar{x},\bar{y})hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\bar{x},\bar{y})k^2.$$

onde $\bar{x} = x_0 + \bar{t}h$, $\bar{y} = y_0 + \bar{t}k$.

Condições necessárias para que um ponto interior ao domínio de f seja um extremo local de f:

Teorema 1:

Seja (x_0, y_0) um ponto interior de D_f, tal que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existam,

e tal que (x_0, y_0) seja um extremo de f,

então necessariamente, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Teorema 2:

Seja f de classe C^2 e (x_0, y_0) um ponto interior do domínio de f.

Uma condição necessária para que (x_0, y_0) seja ponto de máximo local de f

é que (x_0, y_0) seja ponto crítico de f e, além disso:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leqslant 0$.

Demonstração do teorema 2:

Vamos aplicar a "regra da segunda derivada":

para $x \mapsto g(x) = f(x, y_0)$. Temos que ter $g'(x_0) = 0$ e $g''(x_0) \leq 0$, se não, $g''(x_0) \Rightarrow x_0$ é min. local!

Mas aqui, $g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $g''(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$!!

Exercício:

Determine os candidatos a extremos locais para:

① $f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + x - y$

② $f(x,y) = x^5 + y^5 - 5x - 5y$.

Condição suficiente para um ponto crítico ser um extremo local:

Definição: * matriz hessiana de f $= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$

* "hessiano" $H(x,y)$: é o determinante da matriz hessiana

isto é: $H(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right]^2 = rt - s^2.$

Teorema:

Sejam f de classe C^2 e (x_0,y_0) um ponto interior de D_f. Suponhamos que (x_0,y_0) seja ponto crítico de f. Então:

ⓐ Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$. Então (x_0,y_0) será ponto de mínimo local de f.

ⓑ Se $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ e $H(x_0,y_0) > 0$. Então (x_0,y_0) será ponto de máximo local de f.

ⓒ Se $H(x_0,y_0) < 0$ então (x_0,y_0) não será extremo local, mas será ponto de sela.

ⓓ Se $H(x_0,y_0) = 0$, podemos afirmar nada.

Def.: ponto de sela

> É um ponto estacionario tal que cada bola $B(a)$ contem pontos x tais que $F(x) < f(a)$ e outros pontos tais que $F(x) > F(a)$.

Demonstração do teorema:

$$\underset{\substack{\| \\ g(1)}}{F(x_0+h, y_0+k)} = \underset{\substack{\| \\ g(0)}}{F(x_0, y_0)} + \underbrace{\cancel{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)k}}_{\substack{\| \\ g'(0)=0}} + E(h,k)$$

onde $E(h,k) = rh^2 + 2shk + tk^2$.

Caso a: $\boxed{r>0 \text{ e } rt-s^2>0}$ Então $E(h,k) = r\left(\left(h+\frac{s}{r}\right)^2 - \frac{s^2}{r^2}k^2 + \frac{t}{r}k^2\right) = r\left(\left(h+\frac{s}{r}k\right)^2 + \frac{1}{r^2}(rt-s^2)k^2\right) \geqslant 0$

Caso b: $\boxed{r<0 \text{ e } rt-s^2>0}$ Então $E(h,k) \leqslant 0$.

Caso c: $\boxed{rt-s^2<0}$ Seja $x = \frac{h}{k}$, então $rx^2+2sx+t$ tem discriminante "$\Delta = b^2-4ac$" $= 4s^2-4rt>0$

então o polinômio tem valores >0 (por exemplo para algum x_0)

e valores <0 (para algum x_1).

$\Rightarrow$ posso escolher qualquer $k \neq 0$ e depois $h = x_i \cdot k$,

assim $E(h,k)$ vai ter valores >0 e <0.