Resumo: Regra da cadeia , caso geral

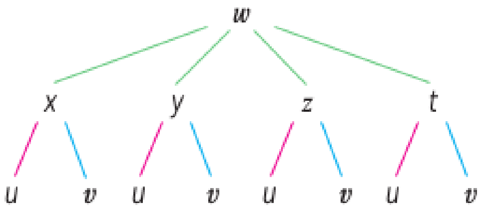
Teorema

Suponha que $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ *seja uma função diferenciável de* n *variáveis* $x_1, \ldots x_n$ *onde cada* x_i *é uma função diferenciável de* m *variáveis* $t_1, \ldots, t_m$*. Então* u *é uma função diferenciável de* $t_1, \ldots, t_m$ *e*

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$*.*

Como lembrar do resultado:



Laplaciano em coordenadas polares

Exercício

Suponha $z = f(x,y)$ *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\text{sen}\theta$. *Calcule o Laplaciano de* f *com as variavéis* r,θ.

Derivadas parciais em relação a r,θ**:**

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta; \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta. \end{cases}$$

Laplaciano em coordenadas polares, II

Derivada parcial $\partial u/\partial r$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\\ &= \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}$$

Segunda derivada parcial $\partial^2 u/\partial r^2$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial y}\\ &= \cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right)\\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

Derivada parcial $\partial u/\partial\theta$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial\theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(-r\sin\theta)+\frac{\partial u}{\partial y}(r\cos\theta)\\
&= -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y}.
\end{aligned}$$

Segunda derivada parcial $\partial^2 u/\partial\theta^2$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} &= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial y}\\
&= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)-r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)\\
&= -r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}-r\sin\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}r\cos\theta\right)\\
&\quad -r\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}+r\cos\theta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}(-r\sin\theta)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}r\cos\theta\right)\\
&= -r\left(\cos\theta\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}\right)+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)
\end{aligned}$$

Laplaciano em coordenadas polares, IV

Agora, vamos calcular e simplificar $(1/r^2)\partial^2 u/\partial\theta^2$ lembrando da formula de $\partial u/\partial\theta$:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Soma $(1/r^2)\partial^2 u/\partial\theta^2 + \partial^2 u/\partial r^2$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

Fim do calculo:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}.}$$

Teorema da função implicita

Teorema

Seja F definida numa bola aberta U contendo (a,b) onde $F(a,b) = 0$, $F_y(a,b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas em U, então a equação $F(x,y) = 0$ define y como uma função de x perto de (a,b), i.e $y = f(x)$ e a derivada de f é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Teorema

Seja F definida numa bola aberta U contendo (a,b,c) onde $F(a,b,c) = 0$, $F_z(a,b,c) \neq 0$ e F_x, F_y, F_z são funções contínuas em U, então a equação $F(x,y,z) = 0$ define z como uma função de x,y perto de (a,b,c), i.e $z = f(x,y)$ e as derivadas parciais de f são dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Exercício

Calcule as derivadas e derivadas parciais:

Calcule dy/dx.

$y \cos x = x^2 + y^2$ $\qquad$ $\cos(xy) = 1 + \sin y$

$\tan^{-1}(x^2 y) = x + xy^2$ $\qquad$ $e^y \sin x = x + xy$

$\partial z/\partial x$ $\quad$ $\partial z/\partial y$.

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

$e^z = xyz$ $\qquad$ $yz + x \ln y = z^2$

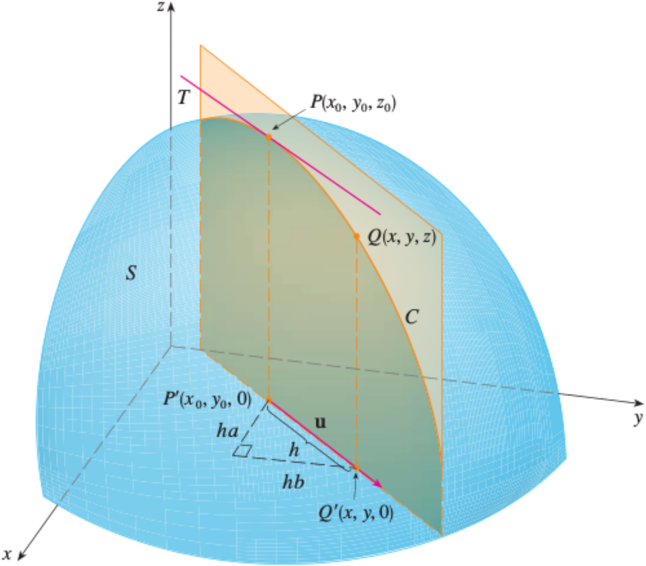
Caso particular: a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{i} = (1, 0)$ é simplesmente $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
Caso particular 2: a derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{j} = (0, 1)$ é simplesmente $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.
Outras direções:

Definição

A derivada direcional de f em (x_0, y_0) na direção do vetor unitário $\vec{u} = (a, b)$ é

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h},$$

se esse limite existir.


z
T
P(x0, y0, z0)
Q(x, y, z)
S
C
P′(x0, y0, 0)
u
ha
h
hb
Q′(x, y, 0)
y
x

Derivadas direcionais II

Relação com a diferencial: quando f é diferenciável, calcular uma derivada direcional é facil:

Teorema

Seja f uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\vec{u} = (a, b)$ e

$$D_{\vec{u}}(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Exercício

Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção indicada pelo ângulo θ,i.e na direção de $\vec{u} = (\cos\theta, \mathrm{sen}\theta)$:

1. $f(x, y) = x^2y^3 - y^4$, *em* $(2, 1)$, *com* $\theta = \pi/4$
2. $f(x, y) = x\mathrm{sen}(xy)$ *em* $(2, 0)$ *com* $\theta = \pi/3$.

Derivadas direcionais III

Relação com a diferencial: quando f é diferenciável, calcular uma derivada direcional é facil:

Teorema

Seja f uma função diferenciável de x e y, então f tem derivada direcional na direção de qualquer vetor $\vec{u} = (a, b)$ e

$$D_{\vec{u}}(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

Exercício

Determine a derivada direcional de f no ponto dado e na direção de $\vec{v}$:

$f(x, y) = e^x \sin y, \quad (0, \pi/3), \quad \mathbf{v} = \langle -6, 8 \rangle$

$f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}, \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = \langle 3, 5 \rangle$

$g(p, q) = p^4 - p^2 q^3, \quad (2, 1), \quad \mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

$g(r, s) = \tan^{-1}(rs), \quad (1, 2), \quad \mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 10\mathbf{j}$

$f(x, y, z) = xe^y + ye^z + ze^x, \quad (0, 0, 0), \quad \mathbf{v} = \langle 5, 1, -2 \rangle$

$f(x, y, z) = \sqrt{xyz}, \quad (3, 2, 6), \quad \mathbf{v} = \langle -1, -2, 2 \rangle$

$h(r, s, t) = \ln(3r + 6s + 9t), \quad (1, 1, 1), \quad \mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

Vetor Gradiente

Definição

Seja f uma função de x e y, então o gradiente de f é a função ∇f definida por

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

Gradiente e derivada direcional:

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}} f(x, y) &= f_x(x, y)\, a + f_y(x, y)\, b \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \langle a, b \rangle \\ &= \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle \cdot \mathbf{u} \end{aligned}$$

Isso implica immediatamente:

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}$$

Caso de 3 variavéis: mesma definição.

Interpretação do gradiente

Teorema

Seja f uma função diferenciável de 2 ou 3 variáveis. O valor máximo da derivada direcional $D_{\vec{u}}f(\vec{x})$ é $|\nabla f(\vec{x})|$, e ocorre quando $\vec{u}$ tem a mesma direção que $\nabla f(\vec{x})$.

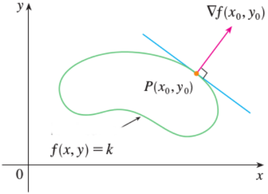
Demonstração:

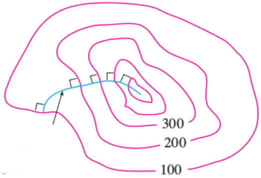
$$D_{\vec{u}}f = \nabla f.\vec{u} = |\nabla f|.|\vec{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta,$$

onde θ é o ângulo entre $\vec{u}$ e ∇f.

Gradiente e superfícies de nível

Caso de $z = f(x,y)$:

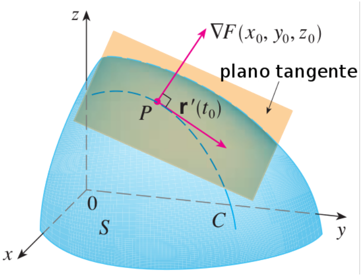




1. O gradiente $\nabla f(x,y)$ indica a direção de maior crescimento da função f.
2. O gradiente $\nabla f(x,y)$ é ortogonal às curvas de nível.

Demonstração: seja $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ uma curva dentro de $f(x,y) = k = constante$. Então
$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 0 = \nabla f(x(t), y(t)).(x'(t), y'(t))$.

Caso de $f(x,y,z)$:



1. O gradiente $\nabla f(x,y,z)$ indica a direção de maior crescimento da função f.
2. O gradiente $\nabla f(x,y,z)$ é ortogonal às curvas de nível.

Demonstração: seja $t \mapsto \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva dentro de $f(x,y,z) = k = \mathit{constante}$. Então $\frac{d}{dt} f(x(t), y(t), z(t)) = 0 = \nabla f(x(t), y(t), z(t)).(x'(t), y'(t), z'(t))$.

Plano tangente à superfície de nível

Equação do plano tangente: é o plano passando por (x_0, y_0, z_0), ortogonal a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

Equação da reta normal: é a reta passando por (x_0, y_0, z_0), na direção de $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Equação paramétrica:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t.\nabla f(x_0, y_0, z_0), \quad t \in \mathbb{R}$$

Caso particular:Plano tangente ao gráfico de $z = f(x,y)$

O gráfico $z = f(x,y)$ pode ser visto também como uma superfície de nivél $G(x,y,z) = 0$ para a função $G(x,y,z) = f(x,y) - z$ cujo gradiente é $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$

Equação do plano tangente: é o plano passando por (x_0, y_0, z_0), ortogonal a $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right).(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Equação da reta normal: é a reta passando por (x_0, y_0, z_0), na direção de $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$

Exercício

Determine a taxa de variação máxima de f no ponto dado e a direção onde ocorre.

$$f(x, y) = 4y\sqrt{x}, \quad (4, 1)$$

$$f(s, t) = te^{st}, \quad (0, 2)$$

$$f(x, y) = \sin(xy), \quad (1, 0)$$

$$f(x, y, z) = (x + y)/z, \quad (1, 1, -1)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3, 6, -2)$$

$$f(p, q, r) = \arctan(pqr), \quad (1, 2, 1)$$