Exercício

Exercício

Determine todas as curvas $y(x)$ tais que todas as retas tangentes vão passar pela origem.

Regra da cadeia

Teorema

(Caso 1) Seja $z = f(x, y)$ *uma função diferenciável de* x *e* y*, e* $x = g(t)$*,* $y = h(t)$ *duas funções diferenciáveis de* t*. Então a composta* $t \mapsto f(g(t), h(t))$ *é uma função diferenciável de* t *e*

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Em resumo:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Regra da cadeia , caso 2

Teorema

Suponha que $z = f(x, y)$ *seja uma função diferenciável de* x *e* y*, onde* $x = g(s, t)$ *e* $y = h(s, t)$ *são funções diferenciáveis de* s *e* t*. Então:*

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

e também:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Regra da cadeia , caso geral

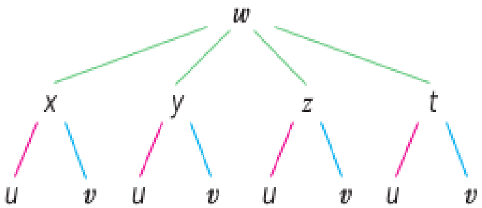
Teorema

Suponha que $u = u(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma função diferenciável de n variáveis $x_1, \ldots x_n$ onde cada x_i é uma função diferenciável de m variáveis $t_1, \ldots, t_m$. Então u é uma função diferenciável de $t_1, \ldots, t_m$ e

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.

Como lembrar do resultado:



Regra da cadeia , caso geral

Exercício

Escreve a regra da cadeia (utilizando um diagrama em árvore).

$u = f(x, y), \quad x = x(r, s, t), \ y = y(r, s, t)$

$R = f(x, y, z, t), \quad x = x(u, v, w), \ y = y(u, v, w),$
$z = z(u, v, w), \ t = t(u, v, w)$

$w = f(r, s, t), \quad r = r(x, y), \ s = s(x, y), \ t = t(x, y)$

$t = f(u, v, w), \quad u = u(p, q, r, s), \ v = v(p, q, r, s),$
$w = w(p, q, r, s)$

Exercício

Determine as derivadas parciais indicadas

$$z = x^4 + x^2 y, \quad x = s + 2t - u, \quad y = stu^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial u} \qquad s = 4, t = 2, u = 1$$

$$T = \frac{v}{2u + v}, \quad u = pq\sqrt{r}, \quad v = p\sqrt{q}\,r;$$

$$\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r} \qquad p = 2, q = 1, r = 4$$

$$w = xy + yz + zx, \quad x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r\theta;$$

$$\frac{\partial w}{\partial r}, \frac{\partial w}{\partial \theta} \qquad r = 2, \theta = \pi/2$$

$$P = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \quad u = xe^y, \quad v = ye^x, \quad w = e^{xy};$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y} \qquad x = 0, y = 2$$

$$N = \frac{p + q}{p + r}, \quad p = u + vw, \quad q = v + uw, \quad r = w + uv;$$

$$\frac{\partial N}{\partial u}, \frac{\partial N}{\partial v}, \frac{\partial N}{\partial w} \qquad u = 2, v = 3, w = 4$$

Derivadas de ordem superior

Suponhamos que $\frac{\partial f}{\partial x}$ tem também derivadas parciais. Então podemos definir:

$$f_{xx} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

e também

$$f_{yx} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

Teorema (teorema de Clairaut, também chamado teorema de Schwarz)

Suponha que f seja definida em uma bola aberta D que contenha o ponto (a,b). Se as funções f_{xy} e f_{yx} forem contínuas em D então

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b).$$

Equações diferenciais parciais

Equação de Laplace: as soluções são chamadas funções harmônicas.

$$\Delta u := \nabla^2 u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Equação da onda: seja $u = u(x, t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Equação de Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi$$

Exercício

Determine se as funções abaixo são soluções de:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

(a) $u = x^2 + y^2$

(b) $u = x^2 - y^2$

(c) $u = x^3 + 3xy^2$

(d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

(e) $u = \sin x \cosh y + \cos x \sinh y$

(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

Equação de Laplace:

Exercício

Se $z = f(x, y)$ *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\text{sen}\theta$*. Encontre* $\partial z/\partial r$ *e* $\partial z/\partial\theta$ *e mostre*

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

Exercício

Se $u = f(x, y)$ *onde* $x = e^s\cos t$ *e* $y = e^s\text{sen}t$*.Mostre*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]$$

Equação da onda:

Exercício

Mostre que cada função $z = f(x + at) + g(x - at)$ *é solução de*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

Exercício

Verifique que a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 . t} \text{sen} kx$ *é solução da equação de condução do calor:*

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

Exemplos

Exercício

Suponha $z = f(x,y)$ *onde* $x = r\cos\theta$ *e* $y = r\text{sen}\theta$. *Calcule o Laplaciano de* f *com as variavéis* r, θ.

Exercício

Suponha $z = f(x,y)$ *onde* $x = g(s,t)$ *e* $y = h(s,t)$. *Mostre que*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Teorema da função implicita

Teorema

Seja F definida numa bola aberta U contendo (a,b) onde $F(a,b) = 0$, $F_y(a,b) \neq 0$ e F_x e F_y são funções contínuas em U, então a equação $F(x,y) = 0$ define y como uma função de x perto de (a,b), i.e $y = f(x)$ e a derivada de f é dada por:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Teorema

Seja F definida numa bola aberta U contendo (a,b,c) onde $F(a,b,c) = 0$, $F_z(a,b,c) \neq 0$ e F_x, F_y, F_z são funções contínuas em U, então a equação $F(x,y,z) = 0$ define z como uma função de x,y perto de (a,b,c), i.e $z = f(x,y)$ e as derivadas parciais de f são dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Derivação implicita

Exercício

Calcule as derivadas e derivadas parciais:

Calcule dy/dx.

$y \cos x = x^2 + y^2$ $\qquad$ $\cos(xy) = 1 + \sin y$

$\tan^{-1}(x^2 y) = x + xy^2$ $\qquad$ $e^y \sin x = x + xy$

$\partial z/\partial x$ $\quad$ $\partial z/\partial y$.

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 - y^2 + z^2 - 2z = 4$

$e^z = xyz$ $\qquad$ $yz + x \ln y = z^2$