Lista SD1

Sylvain Bonnot

Escolhe 4 questões, para entregar até o fim do curso

Exercício 1. *Seja X um espaço métrico* topologicamente completo *(i.e um espaço topológico homeomorfo com um espaço métrico completo) e $T : X \to X$ uma aplicação contínua. Seja $x \in X$ um ponto cuja órbita seja um conjunto fechado de X. Mostre que: ou x tem um iterado que seja periódico, ou $\omega_T(x) = \emptyset$.*

Exercício 2. *Seja $T : (X,d) \to (X,d)$ um homeomorfismo, onde (X,d) é um espaço métrico compacto. Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que:*

$$\forall n \geq 0, \forall x,y \in X, d(T^n(x), T^n(y)) \leq Kd(x,y).$$

Suponhamos também que T é fortemente auto semelhante de ordem $N > 1$, *isto é, existe um abert A de X tal que:*

- *para todo $x \in A$, temos $T^i(x) \notin A$ para $0 < i < N$ e $T^N(x) \in A$;*
- $X = \cup_{i=0}^{N-1} T^i A$;
- *existe um homeomorfismo $h : X \to A$ que seja $k-$Lipschitz (com $k < 1$), que conjuga T com a restrição $T^N_{|A}$.*

Vamos definir $A_n = h^n(X)$.

1) *Mostre que a interseção dos A_n para $n \in \mathbb{N}$ é um ponto, e que os conjuntos $T^k(A_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k < N^n$ formam uma base para a topologia de X.*

2) *mostre que T não tem pontos periódicos.*

3) *mostre que T é minimal.*

4) *Aplicação ("odômetro diádico"): Seja $T : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definida por $T(1,1,1,\ldots) = (0,0,0,\ldots)$; se não, seja $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um ponto de X tal que um dos x_n seja zero, e seja $k = \inf\{n \in \mathbb{N}; x_n = 0\}$. Então $T(x) = y$ é a sequência y definida por $y_n = 0$ se $n < k$, $y_k = 1$, $y_n = x_n$ se $n > k$. Mostre que T é minimal.*

Exercício 3. *Seja (X,d) um espaço métrico compacto, e $f : X \to X$ uma isometria sobrejetiva de X. Suponhamos que f tem uma órbita densa $\{f^n(x_0)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.*

1) *mostre que se X possui um ponto isolado, então todos os pontos são isolados, e X é finito, f é uma permutação de X com um único ciclo.*

2) *mostre que todas as semi-órbitas positivas são densas e que f é minimal.*

3) *mostre que se $f^{n_i}(x_0)$ e $f^{m_i}(x_0)$ são de Cauchy, então $f^{n_i+m_i}(x_0)$ também.*

4) *Podemos definir na órbita de x_0 uma lei de produto, pela formula $f^n(x_0) \star f^m(x_0) = f^{n+p}(x_0)$. Mostre que podemos estender essa lei para X inteiro, e que ela defina uma estrutura de grupo comutativo.*

Exercício 4. *Dê um exemplo de homeomorfismo da esfera S^2 com conjunto não errante feito de 3 pontos distintos.*

Exercício 5. *Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $f : T^2 \to T^2$ (onde $T^2 := S^1 \times S^1$) tal que*

$$f(x,y) := (x+\alpha, x+y).$$

1) *Mostre que cada U aberto, não vazio, $f-$invariante é denso.*

2) *Suponhamos que a semi-órbita positiva de (x_0, y_0) seja densa. Mostre que para todo $y \in S^1$ a semi-órbita positiva de (x_0, y) é densa. Se também o conjunto $\cup_{k=0}^{n} f^k(x_0, y_0)$ é $\epsilon-$denso então $\cup_{k=0}^{n} f^k(x_0, y)$ é $\epsilon-$denso.*

3) *Mostre que cada semi-órbita positiva é densa (i.e, f é minimal).*

Exercício 6. *Seja T um homeomorfismo num espaço compacto X. Seja $x \in X$. Podemos definir a* variedade instável *de x como*

$$W^u(x) = \{y \in X | d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \to 0, \text{ quando } n \to +\infty\}.$$

Suponhamos que o conjunto não errante Ω de T seja finito. Mostre:

$$X = \cup_{x \in \Omega} W^u(x).$$

Exercício 7. *Mostre que um homeomorfismo f de um espaço métrico compacto X é minimal se e somente se para qualquer $\epsilon > 0$ existe um inteiro $N = N(\epsilon)$ tal que para todo $x \in X$ o conjunto $\{x, f(x), \ldots, f^N(x)\}$ seja $\epsilon-$denso em X.*

Lembra que um conjunto Z é $\epsilon-$denso se para qualquer $x \in X$, a bola aberto de centro x e raio ϵ contem um ponto de Z.

Exercício 8. *Mostre, utilizando a definição da entropia com conjuntos $(n,\epsilon)-$separados e geradores, o* **teorema de Abramov***: seja $T : X \to X$ contínua em X espaço métrico compacto, então para todo $m \geq 1$, $h(T^m) = mh(T)$.*

Exercício 9. *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ um sistema dinâmico com medida, tal que $\mu(X) = 1$. Vamos definir $U_T : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ por*

$$U_T(f) = f \circ T$$

(a) *verifique que U_T é uma isometria pela norma L^2*

(b) *Mostre que T é ergódica se e somente os únicos autovetores $f \in L^2$ de U_T para o autovalor 1 são as funções constantes.*

Exercício 10. *Mostre que a rotação $R_\alpha : S^1 \to S^1$ não é "weakly mixing".*

Exercício 11. *Calcule a freqüência do digito 1 na sequência a_n onde a_n é o primeiro digito de 2^n, $n \in \mathbb{N}$. (Dica: utilize o teorema de Birkhoff para a rotação R_α onde $\alpha = \log_{10} 2$.)*

Exercício 12. *Neste exercício podemos utilizar o fato que a transformação de Gauss $T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ é ergódica pela medida de Gauss μ.*

(a) *mostre que $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(n)$ se $x \in P_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ é em $L^1(\mu)$ e que*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\log 2} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) < +\infty$$

(b) *Mostre que para q.t.p $x \in [0,1]$*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\log a_i = \int f(x)d\mu;$$

onde os $a_i \in \mathbb{N}$ são os inteiros aparecendo na fração contínua de x.

(c) *mostre, para q.t.p $x \in [0,1]$, que a media geométrica $M_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ dos n primeiros inteiros da fração contínua de x satisfaz:*

$$\lim_n M_n = \prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{\frac{\log n}{\log 2}}.$$