MAT2352 - Lista 6

1. Calcule as seguintes integrais de linha ao longo da curva indicada:
(a) $\int_\gamma x\,ds$, $\gamma(t) = (t^3, t)$, $0 \le t \le 1$. Resp. $(10\sqrt{10} - 1)/54$.
(b) $\int_\gamma xy^4\,ds$, γ é a semi-circunferência $x^2 + y^2 = 16$, $x \ge 0$. Resp. $1638, 4$.
(c) $\int_\gamma (x - 2y^2)\,dy$, γ é o arco da parábola $y = x^2$ de $(-2, 4)$ a $(1, 1)$. Resp. 48.
(d) $\int_\gamma xy\,dx + (x - y)\,dy$, γ consiste dos segmentos de reta de $(0, 0)$ a $(2, 0)$ e de $(2, 0)$ a $(3, 2)$. Resp. $\frac{17}{3}$.
(e) $\int_\gamma xyz\,ds$, $\gamma : x = 2t$, $y = 3\ \mathrm{sen}t$, $z = 3\cos t$, $0 \le t \le \pi/2$. Resp. $9\sqrt{13}\pi/4$.

2. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y)\vec{i} - 7yz\vec{j} + 2xz^2\vec{k}$ e γ é a curva ligando o ponto $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ nos seguintes casos:
(a) $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$; Resp. $-\frac{11}{15}$.
(b) γ é composta dos segmentos de reta de $(0, 0, 0)$ a $(1, 0, 0)$, depois a $(1, 1, 0)$ e depois a $(1, 1, 1)$; Resp. 1.

3. Calcule
(a) $\int_\gamma x\,dx + (y+x)\,dy + z\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $z = x^2+y^2$ e $z = 2x+2y-1$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxy seja percorrida uma vez no sentido horário;
(b) $\int_\gamma (2y+1)\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x^2+4y^2 = 1$ e $x^2+z^2 = 1$, com $y \ge 0$, $z \ge 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$;
(c) $\int_\gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$, sendo γ a intersecção das superfícies $x+y = 2$ e $x^2+y^2+z^2 = 2(x+y)$, orientada de modo que sua projeção no plano Oxz seja percorrida uma vez no sentido horário;

Resp.: (a) $-\pi$, (b) -2, (c) $-2\pi\sqrt{2}$.

4. Usando o Teorema de Green, calcule as seguintes integrais de linha:
(a) $\oint_\gamma x^2y\,dx + xy^3\,dy$, onde γ é o quadrado com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, orientado positivamente; Resp. $-1/12$.
(b) $\oint_\gamma (x + 2y)\,dx + (x - 2y)\,dy$, onde γ consiste do arco da parábola $y = x^2$ de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ e do segmento de reta de $(1, 1)$ a $(0, 0)$; Resp. $-1/6$.
(c) $\oint_\gamma (y + e^{\sqrt{x}})\,dx + (2x + \cos y^2)\,dy$, onde γ é a fronteira da região limitada pelas parábolas $y = x^2$ e $x = y^2$ percorrida no sentido anti-horário; Resp. $1/3$.
(d) $\oint_\gamma x^2\,dx + y^2\,dy$, γ é a curva $x^6 + y^6 = 1$, sentido anti-horário; Resp. 0.

5. Calcule
(a) $\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva fronteira da região determinada pelas curvas $y^2 = 2(x + 2)$ e $x = 2$, orientada no sentido horário.
(b) $\int_\gamma \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ sendo γ a curva $y = x^2 + 1$ $-1 \le x \le 2$, percorrida do ponto (-1,2) a (2,5).
(c) $\int_\gamma \frac{y\,dx - (x-1)\,dy}{(x-1)^2+y^2}$ sendo γ a circunferência $x^2 + y^2 = 4$, percorrida no sentido horário.

Resp.: (a) -2π; (b) $\frac{1}{2}\ln\frac{29}{5}$; (c) 2π.

6. Determine uma representação paramétrica de cada uma das superfície descritas abaixo e calcule sua área:

(a) S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ interior ao cone $z \ge \sqrt{x^2 + y^2}$; Resp. $4\pi(2 - \sqrt{2})$.
(b) S é a parte do cilindro $x^2 + z^2 = 1$ compreendida entre os planos $y = -1$ e $y = 3$; Resp. 8π.

7. Calcule as seguintes integrais de superfícies

(a) $\iint_S y\,d\sigma$, onde S é a superfície dada por $z = x + y^2$, $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 2$; R. $13\sqrt{2}/3$.
(b) $\iint_S x^2\,d\sigma$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; Resp. $4\pi/3$.

(c) $\iint_S y d\sigma$, onde S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, que está contido no primeiro octante; Resp. $3\sqrt{14}$.

8. Calcule a integral de superfície $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$ para cada um dos campos de vetores $\vec{F}$ e superfícies orientadas S indicadas abaixo. Em outras palavras, calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de S. Quando S é uma superfície fechada, admita que S está orientada pela normal *exterior*.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\vec{i} - 3xy^2\vec{j} + 4y^3\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada de modo que a normal no ponto (0,0,9) é $\vec{k}$; Resp. 0.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$ e S é a parte do plano $3x+2y+z=6$, interior ao cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que seu vetor normal é $\dfrac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$; Resp. $-3\pi/4$.

(c) $\vec{F}(x,y,z) = -x\vec{i} - y\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S é a parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, entre os planos $z=1$ e $z=2$, orientada de modo que sua normal $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$; Resp. $-73\pi/6$.

9. Use o teorema de Stokes para calcular $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ em cada um dos seguintes casos:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = xz\vec{i} + 2xy\vec{j} + 3xy\vec{k}$ e γ é a fronteira da parte do plano $3x+y+z=3$ contida no primeiro octante, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 7/2.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (z^2+e^{x^2})\vec{i} + (y^2+\ln(1+y^2))\vec{j} + (xy+\text{sen}z^3)\vec{k}$ e γ é a fronteira do triângulo com vértices (1,0,0), (0,1,0) e (0,0,2), orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário; Resp. 4/3.

10. Calcule $\iint_S (\text{rot } \vec{F})\cdot\vec{N}dS$ sendo:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ e S é a parte do paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está acima do plano $z=5$, orientada pelo campo de vetores normais que aponta para cima; Resp. 4π.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (xz,\ x-y,\ x^2y)$ e S formada pelas 3 faces, que não estão no plano xy, do tetraedro formado pelos planos coordenados e o plano $3x+y+3z=6$, sendo $\vec{N}$ o campo normal exterior ao tetraedro; Resp. 6.

11. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$, ou seja, o fluxo de $\vec{F}$ através de S ($\vec{N}$ = normal unitária exterior), para:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = -xz\vec{i} + (y^3 - yz)\vec{j} + z^2\vec{k}$ e S o elipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$; Resp. $\frac{4}{5}\pi ab^3c$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (x^3 + y\text{sen}(z),\ y^3 + z\text{sen}(x),\ 3z)$ e S a superfície do sólido limitado pelos hemisférios $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ e pelo plano $z=0$. Resp. $\frac{194\pi}{5}$.