SD1 Lista 5, (para entregar até 31/05)

Sylvain Bonnot

Teoria ergódica e teorema de Birkhoff

Exercício 1. *Seja* $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$ *um sistema dinâmico com medida, tal que* $\mu(X) = 1$. *Vamos definir* $U_T : L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^2(X, \mathcal{A}, \mu)$ *por*

$$U_T(f) = f \circ T$$

(a) *verifique que* U_T *é uma isometria pela norma* L^2

(b) *Mostre que* T *é ergódica se e somente os únicos autovetores* $f \in L^2$ *de* U_T *para o autovalor* 1 *são as funções constantes.*

Exercício 2. *Mostre que a rotação* $R_\alpha : S^1 \to S^1$ *não é "weakly mixing".*

Exercício 3. *Calcule a freqüência do digito* 1 *na sequência* a_n *onde* a_n *é o primeiro digito de* 2^n, $n \in \mathbb{N}$. *(Dica: utilize o teorema de Birkhoff para a rotação* R_α *onde* $\alpha = \log_{10} 2$.*)*

Exercício 4. *Neste exercício podemos utilizar o fato que a transformação de Gauss* $T(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right]$ *é ergódica pela medida de Gauss* μ.

(a) *mostre que* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \ln(n)$ *se* $x \in P_n = \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ *é em* $L^1(\mu)$ *e que*

$$\int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{\log 2} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) < +\infty$$

(b) *Mostre que para q.t.p* $x \in [0, 1]$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \log a_i = \int f(x) d\mu;$$

onde os $a_i \in \mathbb{N}$ *são os inteiros aparecendo na fração contínua de* x.

(c) *mostre, para q.t.p* $x \in [0, 1]$, *que a media geométrica* $M_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{1/n}$ *dos* n *primeiros inteiros da fração contínua de* x *satisfaz:*

$$\lim_n M_n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{\frac{\log n}{\log 2}}.$$