

# Mat 234 Medida e integração - Lista 5

Sylvain Bonnot

**Exercício 1.** Mostre que  $G(x) := \int_{\mathbb{R} - \{0\}} \frac{\text{sen}(tx)}{t(1+t^2)} dt$  é diferenciável. Determine  $G(0)$  e  $G'(0)$ . Mostre:

$$xG'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{2t \cdot \text{sen}(tx)}{(1+t^2)^2} dt$$

**Exercício 2.** Mostre que  $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$  onde  $\Gamma(t) := \int_{(0,\infty)} e^{-x} x^{t-1} dx$  para  $t > 0$ .

**Exercício 3.** Mostre que para qualquer  $\alpha > 0$  a função  $x \mapsto \left(\frac{\text{sen}(x)}{x}\right)^3 e^{-\alpha x}$  é integrável em  $(0, \infty)$  e de integral contínua em  $\alpha$ .

**Exercício 4.** Seja  $f_n$  uma sequência de funções mensuráveis positivas Lebesgue-integráveis em  $\mathbb{R}$ , convergindo quase-sempre para uma função  $f$  e tal que  $\int f_n \rightarrow \int f$ . Seja  $g_n := \min(f_n, f)$ . Mostre que  $\lim \int g_n = \int f$  e que  $\lim \int |f_n - f| = 0$ .

**Exercício 5.** Seja  $f_n$  uma sequência de funções mensuráveis integráveis em  $\mathbb{R}$ , convergindo q.t.p para uma função  $f$  integrável. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes:

(a)  $\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n - f| = 0$

(b)  $\lim_n \int_{-\infty}^{\infty} |f_n| = \int_{-\infty}^{\infty} |f|$