Lista 5 Mat 234

Sylvain Bonnot

Exercício (0) Sejam μ, ν duas medidas $\sigma-$finitas definidas nos borelianos de $\mathbb{R}$.

(a) Mostre que $D_\mu := \{x \in \mathbb{R}; \mu(\{x\}) > 0\}$ é finito ou enumerável.

(b) Seja $\Delta = \{(x,x); x \in \mathbb{R}\}$ a diagonal. Mostre que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}).\nu(\{x\})$

Exercício (1)

(a) Verifique: $\forall n \geq 1, \int_0^n \frac{\text{sen}x}{x} dx = \int_0^n \left(\int_0^\infty e^{-xt} dt\right) \text{sen}x dx$

(b) Calcule $F_n(t) := \int_0^n e^{-xt} \text{sen}x dx$ para $t \geq 0$.

(c) Calcule $\lim_n \int_0^\infty F_n(t) dt$.

(d) Finalmente mostre que $\lim_n \int_0^n \frac{\text{sen}x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercício (2)(Pode ser feito também sem Fubini!) Seja $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ uma função mensurável. Mostre que para q.t.p $y \in \mathbb{R}$ temos

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}; f(x) = y\}) = 0$$

Exercício (3) Seja $(E, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida $\sigma-$finito, e $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ uma função mensurável:

(a) Seja $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função crescente de classe C^1 tal que $g(0) = 0$. Mostre que

$$\int_E g \circ f d\mu = \int_0^{+\infty} g'(t) \mu(\{f \geq t\}) dt.$$

(b) Mostre que $\int_E f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f \geq t\}) dt$

(c) Suponha que μ seja finita e que existir $p \geq 1$ e $c > 0$ tais que para todo $t > 0$ temos $\mu(\{|f| \geq t\}) \leq c.t^{-p}$. Mostre que $f \in L^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ para todo $q \in [1, p[$.

Exercício (4) Mostre que as seguintes condições são equivalentes (P é uma medida de probabilidade e as Y_n são variáveis aleatórias):

(a) $Y_n \to 0$ q.t.p

(b) Para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_k P\left(\bigcup_{n=k}^\infty \{\omega; |Y_n(\omega)| \geq \epsilon\}\right) = 0$$