

MAT2352 - Cálculo para Funções de várias variáveis II

2o. semestre de 2015

4a. Lista de Exercícios

1. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\int \int_R (2y^2 - 3xy^3) dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3\}$.

(b) $\int \int_R x \operatorname{sen} y dx dy$, onde $R = \{(x, y) : 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{6}\}$.

(c) $\int \int_R \frac{1}{x+y} dx dy$, onde $R = [1, 2] \times [0, 1]$. Resp. (a) $-\frac{585}{8}$, (b) $\frac{15}{4}(2 - \sqrt{3})$, (c) $\ln \frac{27}{16}$.

2. Determine o volume do sólido limitado pela superfície $z = x\sqrt{x^2 + y}$ e os planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$. Resp. $\frac{4}{15}(2\sqrt{2} - 1)$.

3. Determine o volume do sólido contido no primeiro octante limitado pelo cilindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$. Resp. 36.

4. Calcule as integrais iteradas

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx dy. \quad \text{Resp. } -\frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2}.$$

As respostas contradizem o Teorema de Fubini? Explique.

5. Calcule as seguintes integrais duplas:

(a) $\int \int_D xy dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

(b) $\int \int_D (x^2 - 2xy) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 2 - x\}$.

(c) $\int \int_D e^{x/y} dx dy$, onde $D = \{(x, y) : 1 \leq y \leq 2, y \leq x \leq y^3\}$.

(d) $\int \int_D x \cos y dx dy$, onde D é a região limitada por $y = 0$, $y = x^2$, $x = 1$.

(e) $\int \int_D 4y^3 dx dy$, onde D é a região limitada por $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

(f) $\int \int_D xy dx dy$, onde D é a região do primeiro quadrante limitada pela circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

(g) $\int \int_D (x^2 \operatorname{tg} x + y^3 + 4) dx dy$, onde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$.

Resp. (a) $\frac{1}{12}$, (b) $-\frac{19}{42}$, (c) $\frac{1}{2}e^4 - 2e$, (d) $(1 - \cos 1)/2$, (e) $\frac{500}{3}$, (f) $\frac{1}{8}$, (g) 8π .

6. Determine o volume do sólido S em cada um dos seguintes casos:

(a) S é limitado superiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e sua projeção no plano xy é a região limitada por $y = x^2$ e $x = y^2$.

(b) S é limitado superiormente por $z = xy$ e sua projeção no plano xy é o triângulo de vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(1, 2)$.

(c) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + z^2 = 9$ e pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + 2y = 2$.

(d) S é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $x + y + z = 1$.

(e) S é a região do primeiro octante limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e pelos planos $y = z$, $x = 0$ e $z = 0$.

(f) S é limitado pelos cilindros $x^2 + y^2 = r^2$ e $y^2 + z^2 = r^2$.

Resp. (a) $\frac{6}{35}$, (b) $\frac{31}{8}$, (c) $\frac{1}{6}(11\sqrt{5} - 27) + \frac{9}{2} \arcsin \frac{2}{3}$, (d) $\frac{1}{6}$, (e) $\frac{1}{3}$, (f) $\frac{16}{3}r^3$.

7. Escreva as duas integrais iteradas correspondentes à integral dupla

$$\int \int_D f(x, y) dx dy,$$

onde D é a região do plano limitada pelas curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $x - 2y + 1 = 0$.

8. Calcule as seguintes integrais, invertendo a ordem de integração:

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$ (b) $\int_0^3 \int_{y^2}^9 y \cos(x^2) dx dy$ (c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$.

Resp. (a) $(e^9 - 1)/6$, (b) $\frac{1}{4} \sin 81$, (c) $(2\sqrt{2} - 1)/3$.

9. Calcule as integrais:

(a) $\iint_R x \, dx \, dy$, onde R é o disco de centro na origem e raio 5.

(b) $\iint_R xy \, dx \, dy$, onde R é a região do primeiro quadrante limitada pelas circunferências $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 25$.

(c) $\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy$, onde R é a região interior à cardioide $r = 1 + \sin \theta$ e exterior à circunferência $r = 1$.

(d) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, onde D é a região limitada pelas espirais $r = \theta$ e $r = 2\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Resp. (a) zero, (b) $\frac{609}{8}$, (c) 2, (d) $24\pi^5$