

LISTA 4: SÉRIES DE POTÊNCIAS

Exercício 1. Escrever as séries de Taylor para as seguintes funções e dar o disco de convergência:

1. $f(z) = \frac{z}{z^4+9}$, em $z_0 = 0$ (Resp: $f(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$, no disco $|z| < 3$).
2. $f(z) = \text{sen } z^2$ em $z_0 = 0$ (Resp: $= \sum_0^\infty \frac{z^{4n+2}}{(2n+1)!}$, no disco $|z| < \infty$)
3. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ em $z_0 = i$ (Resp: $\sum_0^\infty \frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}}$ no disco $|z-i| < \sqrt{2}$)
4. $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ em $z_0 = 0$ (Resp: $-1 - 2\sum_1^\infty z^n$ no disco $|z| < 1$)

Exercício 2. Determine o raio de convergência das seguintes séries de potências:

1. $\sum_0^\infty \frac{n^2}{2^{2n}} z^n$ (Resp.: $R = 4$)
2. $\sum_0^\infty 4^n z^{3n}$ (Resp: $R = 4^{-1/3}$)

Exercício 3. Determine os primeiros termos das seguintes séries de Taylor, nos pontos indicados:

- a) $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$, até o termo em z^3 , em $z_0 = 0$ (Resp: $1 + 2z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{8}{3}z^3 + \dots$)
- b) $f(z) = (1-z^2)\text{sen } z$ até o termo em z^5 , em $z_0 = 0$ (Resp: $z^2 - \frac{z^4}{2} + \dots$)
- c) $f(z) = e^{-z}$, até o termo em z^4 , em $z_0 = 0$ (Resp: $1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \dots$)
- d) $f(z) = \frac{z^2}{(4-z)^2}$, até o termo em z^3 , no disco $|z| < 4$ (Resp: $\frac{z^2}{16} + \frac{z^3}{32} + \dots$)

Exercício 4. Determine a expansão (completa) em série de Taylor de

$$\frac{z^3}{1-z^3} \text{ no disco } |z| < 1.$$

Exercício 5. Reconhecer nas seguintes séries de potências uma função simples (por exemplo, dada $f(z) = \sum_0^\infty z^{2n}$, podemos reconhecer a função $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ no disco $|z| < 1$):

- a) $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{2n}}{n!}$ (Resp: e^{z^2})
- b) $f(z) = \sum_0^\infty z^{3n+1}$ (Resp: $\frac{z}{1-z^3}$)
- c) $f(z) = \sum_2^\infty n(n-1)z^n$ (Resp: $\frac{2z^2}{(1-z)^3}$)

Exercício 6. Mostre que a série de potências $\sum_0^\infty n z^n$ não tem nenhum ponto de convergência no círculo $|z| = 1$.

Exercício 7. Mostre que a série $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n^2}$ converge em todo ponto do círculo $|z| = 1$.