MaT 234 Lista 3

Sylvain Bonnot

Exercício 1. *Seja E um conjunto Lebesgue-mensurável de $(0,1)$. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe um aberto U e um fechado F tais que:*

$$F \subset E \subset U \text{ e também } \mu^*(E) - \epsilon \leq \mu^*(F) \leq \mu^*(U) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

Mostre que a existência de tais F, U para todo ϵ implica que E é mensurável.

Exercício 2. Definição historica da mensurabilidade.

Para um conjunto fechado $F \subset \mathbb{R}$, vamos definir $\mu(F) = 1 - \mu^*(U)$ onde U é o complemento de F e μ^* é a medida exterior habitual na reta real. A medida interior de E, denotada $\mu_*(E)$ é definida por:

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F); F \subset E,\ F \text{ fechado}\}$$

Mostre: E é mensurável se e somente se $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Exercício 3. *Sejam $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto de medida de Lebesgue finita e $f : E \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\lambda\left\{x; |f(x)| > N\}\right) < \epsilon.$$

Exercício 4. *Mostre que toda função mensurável limitada é limite uniforme de uma sequência de funções simples.*