

SD1 Lista 3, (para entregar)

Sylvain Bonnot

Dinâmica topológica

Exercício 1. Seja X um espaço métrico topologicamente completo (i.e um espaço topológico homeomorfo com um espaço métrico completo) e $T : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Seja $x \in X$ um ponto cuja órbita seja um conjunto fechado de X . Mostre que: ou x tem um iterado que seja periódico, ou $\omega_T(x) = \emptyset$.

Exercício 2. Seja $T : (X, d) \rightarrow (X, d)$ um homeomorfismo, onde (X, d) é um espaço métrico compacto. Suponhamos que existe uma constante $K > 0$ tal que:

$$\forall n \geq 0, \forall x, y \in X, d(T^n(x), T^n(y)) \leq Kd(x, y).$$

Suponhamos também que T é fortemente auto semelhante de ordem $N > 1$, isto é, existe um aberto A de X tal que:

- para todo $x \in A$, temos $T^i(x) \notin A$ para $0 < i < N$ e $T^N(x) \in A$;
- $X = \cup_{i=0}^{N-1} T^i A$;
- existe um homeomorfismo $h : X \rightarrow A$ que seja k -Lipschitz (com $k < 1$), que conjuga T com a restrição $T|_A$.

Vamos definir $A_n = h^n(X)$.

- 1) Mostre que a interseção dos A_n para $n \in \mathbb{N}$ é um ponto, e que os conjuntos $T^k(A_n)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k < N^n$ formam uma base para a topologia de X .
- 2) mostre que T não tem pontos periódicos.
- 3) mostre que T é minimal.
- 4) Aplicação ("odômetro diádico"): Seja $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definida por $T(1, 1, 1, \dots) = (0, 0, 0, \dots)$; se não, seja $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um ponto de X tal que um dos x_n seja zero, e seja $k = \inf\{n \in \mathbb{N}; x_n = 0\}$. Então $T(x) = y$ é a sequência y definida por $y_n = 0$ se $n < k$, $y_k = 1$, $y_n = x_n$ se $n > k$. Mostre que T é minimal.

Exercício 3. Seja (X, d) um espaço métrico compacto, e $f : X \rightarrow X$ uma isometria sobrejetiva de X . Suponhamos que f tem uma órbita densa $\{f^n(x_0)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

- 1) mostre que se X possui um ponto isolado, então todos os pontos são isolados, e X é finito, f é uma permutação de X com um único ciclo.
- 2) mostre que todas as semi-órbitas positivas são densas e que f é minimal.
- 3) mostre que se $f^{n_i}(x_0)$ e $f^{m_i}(x_0)$ são de Cauchy, então $f^{n_i+m_i}(x_0)$ também.
- 4) Podemos definir na órbita de x_0 uma lei de produto, pela formula $f^n(x_0) \star f^m(x_0) = f^{n+p}(x_0)$. Mostre que podemos estender essa lei para X inteiro, e que ela defina uma estrutura de grupo comutativo.

Exercício 4. Dê um exemplo de homeomorfismo da esfera S^2 com conjunto não errante feito de 3 pontos distintos.

Exercício 5. Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e $f : T^2 \rightarrow T^2$ (onde $T^2 := S^1 \times S^1$) tal que

$$f(x, y) := (x + \alpha, x + y).$$

- 1) Mostre que cada U aberto, não vazio, f -invariante é denso.
- 2) Suponhamos que a semi-órbita positiva de (x_0, y_0) seja densa. Mostre que para todo $y \in S^1$ a semi-órbita positiva de (x_0, y) é densa. Se também o conjunto $\cup_{k=0}^n f^k(x_0, y_0)$ é ϵ -denso então $\cup_{k=0}^n f^k(x_0, y)$ é ϵ -denso.
- 3) Mostre que cada semi-órbita positiva é densa (i.e, f é minimal).

Exercício 6. Seja T um homeomorfismo num espaço compacto X . Seja $x \in X$. Podemos definir a variedade instável de x como

$$W^u(x) = \{y \in X \mid d(T^{-n}(x), T^{-n}(y)) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow +\infty\}.$$

Suponhamos que o conjunto não errante Ω de T seja finito. Mostre:

$$X = \cup_{x \in \Omega} W^u(x).$$