Mat 234 Medida e integração - Lista 4

Sylvain Bonnot

Funções integráveis, convergência monótona, convergência dominada

Exercício 1. *Sejam f, g em L^+ mostre que as duas seguintes proposições são equivalentes:*

(a) $\forall E \in \mathcal{M}$, $\int_E f = \int_E g$

(b) $f = g$ *quase-sempre.*

Exercício 2. *Mostre que nos teoremas de convergência (monótona, lema de Fatou, dominada) a convergência pontual pode ser subtituida por convergência $\mu-q.s.$*

Exercício 3. Teorema de convergência dominada generalizado

Sejam f_n, g_n, f, g em $L^1(X)$ com $f_n \to f$ e $g_n \to g$ quase-sempre, e $|f_n| \leq g_n$ e $\int g_n \to \int g$. Então $\int f_n \to \int f$.

Exercício 4. *Suponhamos que $f_n, f \in L^1$ e $f_n \to f$ q.s. Então $\int |f_n - f| \to 0$ se e somente se $\int |f_n| \to \int |f|$.*

Exercício 5. *Seja μ a medida de contagem em $\mathbb{N}$. Como interpretar os teoremas de convergência monotona, dominada e o lema de Fatou, como teoremas sobre séries infinitas?*

Exercício 6. *Seja $f \in L^1(E)$ (i.e $\int |f| < +\infty$).Mostre que para todo $\epsilon > 0$ existe ϕ simples mensurável tal que $\int_E |f - \phi| < \epsilon$.*

Exercício 7. *Seja $f \in L^1(E)$ e $g : E \to \mathbb{R}$ tal que $f = g$ q.t.p (”q.t.p”significa para ”quase todo ponto”, i.e $\mu\{x; f(x) \neq g(x)\} = 0$). Mostre g é integrável e $\int_E f = \int_E g$.*

Exercício 8. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Mostre que $\lim_n \int_{|x|>n} f = 0$.*

Exercício 9. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$. Calcule $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) sen^n(x) dx$.*

Exercício 10. *Calcule $\lim_n \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n . e^{-2x} dx$.*

Exercício 11. *Mostre que $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{sen(x)}{x} dx$ existe, e verifique $\int_0^{+\infty} \left| \frac{sen(x)}{x} \right| dx = +\infty$.*

Exercício 12. *Sejam $f_n : E \to \mathbb{R}$ mensuráveis, ≥ 0, uma sequência decrescente de limite $f : E \to \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_n \int_E f_n = \int_E f$, se f_1 é integrável.*

Exercício 13. *Mostre que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$.*