

Mat 1352 Cálculo II - Lista 3

Sylvain Bonnot

Frações parciais

Exercício 1. Escreva as decomposições em frações parciais (sem calcular os valores numéricos dos coeficientes (por exemplo $\frac{x}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-1}$:

1) $\frac{x^2}{x^2 + x - 2}$ (Resp.: $1 - \frac{x+2}{x^2+x+2}$)

2) $\frac{x^4 + 1}{x^5 + 4x^3}$ (Resp.: $\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+4}$)

3) $\frac{x^4}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 2)^2}$ (Resp.: $\frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2}$)

4) $\frac{x^6}{x^2 - 4}$ (Resp.: $x^4 + 4x^2 + 16 + \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$)

Exercício 2. Calcule as seguintes integrais:

1) $\int \frac{x^4}{x-1} dx$ (Resp.: $(1/4)x^4 + (1/3)x^3 + (1/2)x^2 + \ln|x-1| + C$)

2) $\int \frac{5x+1}{(2x+1)(x-1)} dx$ (Resp.: $(1/2)\ln|2x+1| + 2\ln|x-1| + C$)

3) $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1} dx$ (Resp.: $2\ln(3/2)$)

4) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6} dx$ (Resp.: $-3\ln 2 + \ln 3$)

5) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)} dx$ (Resp.: $\frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C$ se $a \neq b$, $\frac{-1}{x+a} + C$ se $a = b$)

6) $\int \frac{x^3+4}{x^2+4} dx$ (Resp.: $(1/2)x^2 - 2\ln(x^2+4) + 2\text{tg}^{-1}(x/2) + C$)

7) $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)} dx$ (Resp.: $\ln|x-1| - (1/2)\ln(x^2+9) - (1/3)\text{tg}^{-1}(x/3) + C$)

8) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$ (Resp.: $(1/2)\ln(x^2+1) + (1/\sqrt{2})\text{tg}^{-1}(x/\sqrt{2}) + C$)

9) $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2} dx$ (Resp.: $\frac{7\sqrt{2}}{8}\text{tg}^{-1}\left(\frac{x-2}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3x-8}{4(x^2-4x+6)} + C$)

10) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$ (Resp.: $2\sqrt{x+1} - \ln(\sqrt{x+1}+1) + \ln|\sqrt{x+1}-1| + C$)

11) $\int \frac{dx}{1-\cos x}$ (Resp.: $-\frac{1}{\text{tg}(x/2)} + C$)

Volumes

Exercício 3. Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pelas curvas dadas em torno das retas especificadas. Esboce a região, o sólido e um disco ou arruela típicos.

- 1) $y = \sqrt{25 - x^2}$, com $2 \leq x \leq 4$ em torno do eixo x (Resp.: $94\pi/3$)
- 2) $y = 5 - x^2, y = (1/4)x^2, -2 \leq x \leq 2$ em torno do eixo y (Resp.: $176\pi/3$)
- 3) $y = x^2, y = \sqrt{x}$ com $0 \leq x \leq 1$ em torno de $y = 1$ (Resp.: $11\pi/30$)
- 4) $y = 3, y = 1 + \sec(x)$ em torno de $y = 1$ (Resp.: $2\pi((4/3)\pi - \sqrt{3})$)
- 5) $xy = 1, y = 0$ com $1 \leq x \leq 2$ em torno de $x = -1$ (Resp.: $2\pi(1 + \ln 2)$)
- 6) Volume da esfera de raio r .
- 7) $y = \sqrt[3]{x}, y = 0$ com $x \leq 1$ em torno do eixo y (Resp.: $6\pi/7$)
- 8) $y = e^{-x^2}, y = 0$ com $0 \leq x \leq 1$ em torno do eixo y (Resp.: $\pi(1 - (1/e))$)
- 9) $x = y^2 + 1, x = 2$ em torno do eixo $y = -2$ (Resp.: $16\pi/3$)
- 10) Volume do cone de altura h , com base um disco de raio r (Resp.: $(1/3)\pi r^2 h$)

Integrais impróprias

Exercício 4. Determine se cada integral é convergente ou divergente. Calcule as integrais que são divergentes.

- 1) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$ (Resp.: divergente)
- 2) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{1+x}} dx$ (Resp.: divergente)
- 3) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ (Resp.: $2e^{-1}$)
- 4) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x+x^2} dx$ (Resp.: $\ln 2$)
- 5) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^2+2x-3} dx$ (Resp.: $(1/4)\ln 5$)
- 6) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (Resp.: divergente)
- 7) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{9+x^6} dx$ (Resp.: $(\pi/9)$)
- 8) $\int_0^{\infty} \frac{x \cdot \arctg(x)}{(1+x^2)^2} dx$ (Resp.: $\pi/8$)
- 9) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}} dx$ (Resp.: 2)

$$10) \int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} dx \quad (\text{Resp.: } 9/2)$$

$$11) \int_0^3 \frac{dx}{x^2 - 6x + 5} \quad (\text{Resp.: divergente})$$

Exercício 5. Determine se a integral é convergente ou divergente.

$$1) \int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^4-x}} dx \quad (\text{Resp.: divergente})$$

$$2) \int_0^\infty \frac{\arctg(x)}{2+e^x} dx \quad (\text{Resp.: convergente})$$

$$3) \int_0^1 \frac{\sec^2 x}{x\sqrt{x}} dx \quad (\text{Resp.: divergente})$$

$$4) \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx \quad (\text{Resp.: } \pi)$$

Exercício 6. Encontre os valores de p para os quais a integral converge e calcule a integral para estes valores de p .

$$1) \int_0^1 x^p \cdot \ln x dx \quad (\text{Resp.: divergente se } p \leq -1 \text{ converge para } \frac{-1}{(p+1)^2} \text{ se não.})$$

$$2) \int_e^\infty \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^p} \quad (\text{Resp.: converge para } \frac{1}{p-1} \text{ se } p > 1, \text{ divergente se não})$$