Mat 234 Medida e integração - Lista 3

Sylvain Bonnot

Funções mensuráveis, integráveis, convergência monótona, convergência dominada

Exercício 1. *Seja* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *uma função que tem uma primitiva* F *em* (a,b). *Mostre que* f *é mensurável.*

Exercício 2. *Seja* $E \subset \mathbb{R}$ *um conjunto de medida* $\lambda(E)$ *finita e* $f : E \to \mathbb{R}$ *mensurável. Mostre que : para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\lambda(\{x; |f(x) > N\}) < \epsilon$.

Exercício 3. *Seja* $f \in L^1(E)$ *(i.e* $\int |f| < +\infty$*).Mostre que para todo* $\epsilon > 0$ *existe* ϕ *simples mensurável tal que* $\int_E |f - \phi| < \epsilon$.

Exercício 4. *Seja* $f \in L^1(E)$ *e* $g : E \to \mathbb{R}$ *tal que* $f = g$ *q.t.p ("q.t.p"significa para "quase todo ponto", i.e* $\mu\{x; f(x) \neq g(x)\} = 0$*). Mostre g é integrável e* $\int_E f = \int_E g$.

Exercício 5. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Mostre que* $\lim_n \int_{|x|>n} f = 0$.

Exercício 6. *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Calcule* $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) sen^n(x) dx$.

Exercício 7. *Calcule* $\lim_n \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n . e^{-2x} dx$.

Exercício 8. *Mostre que* $\lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{sen(x)}{x} dx$ *existe, e verifique* $\int_0^{+\infty} \left| \frac{sen(x)}{x} \right| dx = +\infty$.

Exercício 9. *Sejam* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *mensuráveis,* ≥ 0, *uma sequência decrescente de limite* $f : E \to \mathbb{R}$. *Mostre que* $\lim_n \int_E f_n = \int_E f$, *se* f_1 *é integrável.*

Exercício 10. *Mostre que* $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_1^{\infty} \frac{1}{k^2}$.