# Mat 234 Lista 2

Sylvain Bonnot

Lembra que uma pré-medida é uma medida definida numa álgebra.

**Exercício 1.** *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) < \infty$. Mostre o seguinte:*

*(a) Se $E, F \in \mathcal{M}$ e $\mu(E \Delta F) = 0$ então $\mu(E) = \mu(F)$.*

*(b) a relação $E \sim F$ se $\mu(E \Delta F) = 0$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{M}$.*

*(c) Defina $\rho(E, F) := \mu(E \Delta F)$. Então $\rho(E, G) \leq \rho(E, F) + \rho(F, G)$.*

**Exercício 2.** *Sejam $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra, $\mathcal{A}_\sigma$ a coleção de todas as uniões enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ a coleção de todas as intersecções enumeráveis de elementos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sejam $\mu_0$ uma pré-medida em $A$ e $\mu^*$ a medida exterior induzida por ela.*

*(a) $\forall E \subset X$, $\forall \epsilon > 0$ existe ume $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ e $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon$.*

*(b) Se $\mu^*(E) < \infty$ então $E$ é mensurável se e somente se existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset B$ e $\mu^*(B - E) = 0$.*

*(c) Se $\mu_0$ é $\sigma-$finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item $b$) é supérflua.*

**Exercício 3.** *Seja $\mu^*$ uma medida exterior em $X$ induzida por uma pré-medida finita $\mu_0$. Dado $E \subset X$, defina a* **medida interior** *de $E$ por $\mu_*(E) := \mu_0(X) - \mu^*(E)$. Então $E$ é $\mu^*-$mensurável se e somente se $\mu_*(E) = \mu^*(E)$.*

**Exercício 4.** *Seja $\mathcal{A}$ a coleção de todas as uniões finitas de conjuntos da forma $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, com $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.*

*(a) $\mathcal{A}$ é uma álgebra em $\mathbb{Q}$.*

*(b) a $\sigma-$álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$.*

*(c) Defina $\mu_0$ em $\mathcal{A}$ por $\mu_0() = 0$ e $\mu_0(A) = \infty$ se $A \neq$. Então $\mu_0$ é uma pré-medida em $\mathcal{A}$ e existe mais de uma medida em $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ que estende $\mu_0$.*

**Exercício 5.** *Sejam $\mu$ uma medida finita em $(X, \mathcal{M})$ e $\mu^*$ a medida exterior induzida por ela. Suponha que $E \subset X$ (não necessariamente mensurável) satisfaça $\mu^*(E) = \mu^*(X)$.*

*(a) Se $A, B \in \mathcal{M}$ e $A \cap E = B \cap E$ então $\mu(A) = \mu(B)$.*

*(b) Seja $\mathcal{M}_E := \{A \cap E | A \in \mathcal{M}\}$; defina $\nu : \mathcal{M}_E \to [0, \infty]$ por $\nu(A \cap E) := \mu(A)$ (bem definido, pelo item anterior). Então $\mathcal{M}_E$ é uma $\sigma-$álgebra em $E$ e $\nu$ é uma medida em $\mathcal{M}_E$.*