Mat 234 Medida e integração - Lista 2

Sylvain Bonnot

Medida de Lebesgue em $(0,1)$ e $\mathbb{R}$

Exercício 1. *Sejam $E_1 \subset I_1$ e $E_2 \subset I_2$ onde $I_,1, I_2$ são intervalos disjuntos de $(0,1)$. Mostre que $m^\star(E_1 \cup E_2) = m^\star(E_1) + m^\star(E_2)$.*

Exercício 2. *Seja E um conjunto mensurável de $(0,1)$. Mostre que: $\forall \epsilon > 0$ existe um aberto U e um fechado F tais que:*

$$F \subset E \subset U \text{ e também } m^\star(E) - \epsilon \leq m^\star(F) \leq m^\star(U) \leq m^\star(E) + \epsilon.$$

Mostre que a existência de tais F, U para todo ϵ implica que E é mensurável.

Exercício 3. *Para todo conjunto $E \subset (n, n+1)$ defina $\mu(E) := m^\star(E - n)$ onde $E - n = \{x - n; x \in E\}$. Para todo $E \subset \mathbb{R}$ defina $\mu(E) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu(E \cap (n, n+1))$. Mostre que μ é invariante por translações: i.e $\mu(E + x) = \mu(E)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Exercício 4. Conjunto de Cantor *Seja $U_1 = (1/3, 2/3)$ o terço do meio do intervalo $[0,1]$. Seja U_2 a reunião dos 2 terços do meio dos intervalos de $[0,1] - U_1$, i.e $U_2 = (1/9, 2/9) \cup (7,9,8,9)$. Em geral, seja U_{n+1} a reunião de todos os intervalos abertos que são os terços do meio de todos os intervalos fechados que formam $[0,1] - \cup_{i=1}^{n} U_i$. O conjunto de Cantor K é $[0,1] - \cup_{n=1}^{\infty} U_n$.Mostre as seguintes propriedades:*

(a) K é um conjunto fechado de medida de Lebesgue 0.

(b) os pontos de K são exatamente os pontos de $[0,1]$ que podem ser escritos na base 3 com somente os dígitos 0 e 2.

(c) K é em bijeção com $[0,1]$ (dica: escrever os pontos de $[0,1]$ na base 2).

(d) K não tem pontos isolados.

Exercício 5. Definição histórica de um conjunto mensurável.

(a) Mostre que todo aberto U de $(0,1)$ pode ser escrito como uma reunião contável de intervalos abertos disjuntos, $U = \cup(a_i, b_i)$.

(b) defina $m(U) = \sum(b_i - a_i)$ e defina para todo fechado F, defina $m(F) = 1 - m(U)$ onde $U = F^c$. Defina a medida exterior $m^\star$ como

$$m^\star(E) = \inf\{m(U); E \subset U, U \text{ aberto }\},$$

e a medida interior $m_\star$ como

$$m_\star(E) = \sup\{m(F); F \subset E, F \text{ fechado }\}.$$

Mostre que E é mensurável se e somente se $m^\star(E) = m_\star(E)$ (dica:mostre que $m_\star(E) = 1 - m^\star(E^c)$).