SD1 Lista 1

Sylvain Bonnot

Rotações no círculo

Exercício 1. *Mostre que para todo $k \in \mathbb{Z}$, existe uma semi-conjugação contínua da rotação R_α para $R_{k\alpha}$.*

Exercício 2. *Mostre que para toda sequência finita $(k_1, \dots, k_n)$ de inteiros k_i em $\{0, 1, \dots, 9\}$, existe um inteiro $n > 0$ tal que a representação decimal de 2^n começa com a sequência $(k_1, \dots, k_n)$.*

Dinâmica simbólica

Exercício 3. *Seja Σ_2^+ o espaço das sequências $(x_1, x_2, \dots)$ de 0 e 1 infinitas a direita, e $\sigma : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ o* deslocamento. *Seja $d(v, w) := \sum_{k \geq 1} \frac{|v_k - w_k|}{2^k}$ a métrica habitual. Mostre que as seguintes funções são também métricas e que elas definam a mesma topologia no espaço Σ_2^+:*

$$d'(s, t) = \frac{1}{t(v, w) + 1},$$

$$d''(s, t) = e^{-t(v, w)},$$

onde $d'(v, v) = d''(v, v) = 0$ e $t(v, w)$ é o minimo k tal que $v_k \neq w_k$.

Exercício 4. *Seja $\epsilon > 0$ e $w \in \Sigma_2^+$. Mostre que existe $N > 0$ tal que para todo $n > N$ podemos encontrar um $v \in \Sigma_2^+$ tal que $d(v, w) < \epsilon$ e $d(\sigma^n(v), \sigma^n(w)) = 1$.*

Exercício 5. *Vamos definir o* cilindro de comprimento *n :*

$$C_{w_1, \dots, w_n} := \{v \in \Sigma_2^+ | v_j = w_j \text{ para todo } 1 \leq j \leq n\}.$$

Mostre que todos os cilindros são fechados e abertos (pela topologia induzida pela métrica d).

Exercício 6. *Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ a função (parcialmente) definida em $[0, 1]$ por:*

$$f(x) = 3x \text{ se } x \in [0, 1/3] = I_1 \text{ e } f(x) = 3x - 2 \text{ se } x \in [2/3; 1] = I_2.$$

Para toda sequência $w_1, \dots w_n$ de $w_i = 1$ ou 2 vamos definir por indução $I_{w_1 \dots w_n}$ como

$$I_{w_1 \dots w_n} := I_{w_1} \cap f^{-1}(I_{w_2}) \cap \dots \cap f^{-(n-1)}(I_{w_n}).$$

(a) *Mostre que o domínio de f^n é feito de 2^n intervalos do tipo $I_{w_1 \dots w_n}$, cada um de comprimento 3^{-n}.*

(b) *Seja C a interseção de todos os domínios das f^n, e seja $h : \Sigma_2^+ \to C$ definida por $h(w_1, w_2, \dots) = \cap_{n \geq 1} I_{w_1 \dots w_n}$. Mostre que $f \circ h = h \circ \sigma$.*