# Mat 234 Medida e integração

Sylvain Bonnot

## $\sigma$-álgebras

**Exercício 1.** *Seja* $\Sigma := \{A \subset \mathbb{R}; A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}$ *e* $\mathcal{A} = \{\{x\}; x \in \mathbb{R}\}$. *Mostre que* $\Sigma$ *é uma* $\sigma-$*álgebra, gerada por* $\mathcal{A}$.

**Exercício 2.** *Seja* $X = \{1,2,3,4,5,6\}$. *Determine a* $\sigma-$*álgebra gerada por* $\{\{1,2\},\{1,3\}\}$.

**Exercício 3.** *Seja* $\Sigma$ *uma* $\sigma-$*álgebra de subconjuntos de* $X$ *e* $A \subset X$. *Mostre que*

$$\{(E \cap A) \cup (F - A); E, F \in \Sigma\}$$

*é uma* $\sigma-$*álgebra de* $X$ *gerada por* $\Sigma \cup \{A\}$.

**Exercício 4.** *Seja* $\Sigma$ *uma* $\sigma-$*álgebra com um número infinito enumerável de elementos. Mostre que existe uma sequência* $A_n$ *de elementos disjuntos de* $\Sigma$ *tal que todo* $B \in \Sigma$ *pode ser escrito como união disjunta dos* $A_n$.

**Exercício 5.** *Prove que a* $\sigma-$*álgebra de Borel em* $\mathbb{R}^p$ *pode ser gerada um número enumerável de subconjuntos* $A_i$.

**Exercício 6.** *Seja* $a \in \mathbb{R}$ *e* $B \in Bor(\mathbb{R})$ *um boreliano. Mostre que* $a + B$ *é também um boreliano de* $\mathbb{R}$.

**Exercício 7.** *Mostre que uma álgebra* $\mathcal{A}$ *é uma* $\sigma-$*álgebra se e somente se ela é fechada por uniões enumeráveis crescentes.*

## Espaços com medida

**Exercício 8.** *Seja* $X$ *um espaço com medidas* $\mu_1, \ldots, \mu_n$. *Sejam* $a_1, \ldots a_n$ *números reais positivos. Mostre que* $a_1\mu_1 + \ldots, a_n\mu_n$ *é também uma medida.*

**Exercício 9.** *Seja* $(X, \mathcal{A})$ *um espaço com uma álgebra, e seja* $\mu : \mathcal{A} \to [0,1]$ *uma função finitamente aditiva. Mostre que* $\mu$ *é uma medida se e somente se: para toda sequência descrescente* $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de elementos de* $\mathcal{A}$ *com* $\cap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$ *temos* $\lim_n \mu(A_n) = 0$.

**Exercício 10.** *Seja* $(X, \Sigma, \mu)$ *um espaço com medida e* $E \in \Sigma$. *Defina* $\mu_E : \Sigma \to [0, \infty]$ *por* $\mu_E(A) := \mu(A \cap E)$. *Prove que* $\mu_E$ *é uma medida.*