Uns exemplos do Teorema de Green

Raibel Arias

7 de Novembro de 2015

1 Introdução

Lembremos que o Teorema de Green estabelece uma relação entre integrais duplas com integrais de linha dada por:

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \int\int_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\ dy$$

Onde $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, é um campo de classe C^1 num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $S \subset U$ é uma região de $\mathbb{R}^2$ com bordo uma *curva de Jordan*[1] positivamente orientada[2], o que escrevemos por ∂S^+, parametrizada por um caminho λ, C^1 por partes.

Exemplo 1. Calcule a integral de linha $\int_{\partial C} (2x+y)\ dx - (x - 4xy)\ dy$, sendo C o circulo $x^2 + y^2 = 1$, percorrido (uma vez) em sentido anti-horário.

Neste exemplo $P(x,y) = 2x + y$ e $Q(x,y) = -x + 4xy$ são funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^2$ e C é o bordo positivamente orientado de $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, entao pelo Teorema de Green temos:

$$\int_{\partial C} (2x+y)\ dx - (x - 4xy)\ dy = \int\int_S (4y - 2) dx\ dy,$$

Pasando a coordenadas polares a integral dupla acima é:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r\sin\theta - 2) r dr\ d\theta,$$

Pela linealidade das integrais duplas y o Teorema de Fubinni temos,

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4r\sin\theta - 2) r dr\ d\theta = 4\int_0^1 r^2\ dr \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta - 2\int_0^1 r\ dr \int_0^{2\pi} d\theta = -4\pi$$

2 Áreas

Seja S uma região do plano como a do Teorema de Green e $\lambda\colon [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (x(t), y(t))$ uma curva de Jordan, C^1 por partes, que parametriza a ∂S^+.

[1] Lembra que uma curva de Jordan é qualquer curva fechada simple C que separa ao plano em dois componentes conexas, uma componente é o *interior* de C que é um subconjunto limitado, e a outra componente é o *exterior* que é não limitada, sendo a curva C o bordo comum.

[2] Se supomos a curva de Jordan desenhada no plano xy, visto em $\mathbb{R}^3$ como o plano $z = 0$ declaramos que a curva C tem orientação positiva, o que escrevemos por C^+, se quando caminhamos sobre C (com nossa cabeça apontando a parte positiva do eixo z) durante nosso percurso a componente limitada de C está sempre a nossa esquerda, em outro caso C tem orientação é negativa, o que escrevemos por C^-.

Abaixo mostramos três formulas (alternativas) que permitem calcular a área de S, o que escrevemos por $a(S)$. Por exemplo, tomando o campo $F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (0,x)$, então Green implica

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \int\int_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\ dy = \int\int_S dx\ dy = a(S).$$

Fazendo explicita a integral de linha temos,

$$a(S) = \int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \int_a^b F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\ dt = \int_a^b x(t)\ y'(t)\ dt. \tag{1}$$

Analogamente, tomando o campo $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y, 0)$ temos,

$$\int_{\partial S^+} F \cdot d\lambda = \int\int_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\ dy = \int\int_S dx\ dy = a(S).$$

E neste caso

$$a(S) = \int_a^b F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\ dt = -\int_a^b y(t)\ x'(t)\ dt. \tag{2}$$

Finalmente, se $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)) = (-y, x)$, então não é difícil ver que

$$a(S) = \int_a^b F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\ dt = \frac{1}{2}\int_a^b [x(t)\ y'(t) - y(t)x'(t)]\ dt. \tag{3}$$

Assim que (1), (2) e (3) são três formulas alternativas que podem-se usar para calcular a área de S.

Exemplo 2. Aplique o Teorema de Green para calcular a área da região limitada pela elipse positivamente orientada e parametrizada pelo caminho $\lambda\colon [0, 2\pi] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (a\cos t, b\sin t)$.

Pela formula (3) acima temos,

$$a(S) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(a\cos t)(b\cos t) + ab\sin^2 t]\ dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab[\cos^2 t + \sin^2 t]\ dt = \pi ab$$

3 Regiões com buracos

O Teorema de Green é valido para certas regiões do plano que têm buracos. Por exemplo, a região limada pela coroa circular $1 < x^2 + y^2 < 25$ é um exemplo de uma região com um buraco. Abaixo estabelecemos o Teorema de para um certo tipo de regiões com buracos.

Definição 1. Considerarmos uma curva de Jordan C, assim como um conjunto de curvas de Jordan $C_1, C_2, \ldots, C_k$, todas as curvas são C^1 por partes, tais que:

- C_i esta na região interior a C, para $i = 1, 2, \ldots, k$;
- $C_i \cap C_j = 0$, para $i \neq j$;
- C_i esta no exterior de C_j, para $i \neq j$

A região S do plano com k buracos sera o conjunto de pares $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ que estão no interior de C e no exterior de cada curva C_j, para $j = 1, 2, \ldots, k$, junto com os pontos que estão sobre a s curvas $C, C_1, C_2, \ldots, C_k$.

O bordo de S, ∂S, é por definição o conjunto das curvas $C, C_1, C_2, \ldots, C_k$. Diremos que ∂S esta *positivamente orientado*, ∂S^+, se quando percorremos cada curva $C, C_1, C_2, \ldots, C_k$ a região S sempre esta a nossa esquerda, em outro caso a orientação é negativa, o que escrevemos por ∂S^{-}. Por tanto, para ter ∂S^{+} a curva C deve ter orientação positiva com respeito a sua região interior, e cada curva C_j, para $j = 1, 2, \dots, k$ deve ter orientação negativa com respeito a sua região interior.

Finalmente, o Teorema de Green para a região S estabelece que se P e Q são campos escalares de classe C^1 definidos num aberto U contindo a S, entao é valida a seguinte identidade,

$$\int\int_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\ dy = \int_{C^+} (P\ dx + Q\ dy) + \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j^-} P\ dx + Q\ dy \tag{4}$$

(**Uma prova da identidade acima encontra-se em no calculus vol II do livro de Apostol**)

Exemplo 3. Considerando a regiões abaixo

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$$
$$R_1 = \{(x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 1\}$$
$$R_2 = \{(x, y) \mid (x+2)^2 + y^2 \leq 1\}$$

Defina a região S com dois buracos e verifique a identidade (4) para o campo $F(x, y) = (-y, x)$.

Ao desenhar a 3 regiões acima no plano tem-se $S = R - [\operatorname{int} R_1 \cup \operatorname{int} R_2]$ é uma região com dois buracos, onde

$$\operatorname{int} R_1 := R_1 - \partial R_1$$

e

$$\operatorname{int} R_2 := R_2 - \partial R_2.$$

O bordo de S positivamente orientado é $\partial S^{+} = \underbrace{\partial R^{+}}_{C} \cup \underbrace{\partial {R_1}^{-}}_{C_1} \cup \underbrace{\partial {R_2}^{-}}_{C2}$

Agora definimos as respectivas parametrizações λ, λ_1 e λ_2 de $\partial R^{+}, \partial {R_1}^{-}$ e $\partial {R_2}^{-}$:

$$\lambda \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (4\cos t, 4\sin t);$$

$$\lambda_1 \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda_1(t) = (\cos t - 2, -\sin t);$$

$$\lambda_2 \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (\cos t + 2, -\sin t).$$

O lado esquerdo de (4) é

$$\begin{aligned}\int\int_S \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) dx\ dy = 2\int\int_S dx\ dy = 2a(S) \\ = 2[a(R) - a(R_1) - a(R_2)] \\ = 2[16\pi - \pi - \pi] \\ = 28\pi\end{aligned}$$

Agora o lado direito de (4) é :

$$\int_{C^+} (P\ dx + Q\ dy) = \int_0^{2\pi} F(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} 16 dt = 32\pi$$

$$\int_{C_1^-} (P\ dx + Q\ dy) = \int_0^{2\pi} F(\lambda_1(t)) \cdot {\lambda_1}'(t)\ dt = -2\pi$$

$$\int_{C_2^-} (P\ dx + Q\ dy) = \int_0^{2\pi} F(\lambda_2(t)) \cdot {\lambda_2}'(t)\ dt = -2\pi$$

Assim que,

$$\int_{C^+} (P\ dx + Q\ dy) + \sum_{j=1}^{2} \int_{C_j^-} P\ dx + Q\ dy = \int_{C^+} (P\ dx + Q\ dy) + \int_{C_1^-} (P\ dx + Q\ dy) + \int_{C_2^-} (P\ dx + Q\ dy) = 28\pi.$$

Obtendo a igualdade.

4 Exercicios

Questão 1. Aplicar o Teorema de Green para calcular o integral de linha $\int_C P\ dx + Q\ dy$ quando

- C é quadrado de vertices $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$;
- C é quadrado de vertices $(\pm 1, \pm 1)$;
- C é o circulo de raio 2 e centro na origem.

Questão 2. Verifique o Teorema de Green com o campo F e caminho λ dados:

- $F(x,y) = (3x+2y, x-y)$, $\lambda\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (\cos t, \sin t)$;
- $F(x,y) = (x^2y, y^2x)$, $\lambda\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (2\cos t, 3\sin t)$;
- $F(x,y) = (x,y)$, $\lambda\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \lambda(t) = (\sin^3 t, \cos^3 t)$;
- $F(x,y) = (2xy, 3x^2)$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda_1(t) = (t, t^2), \lambda_2(t) = ((1-t)^2, 1-t)$

Questão 3. Aplicar o Teorema de Green para calcular a integral de linha do campo $F(x,y) = (5x^3 + 4y, 2x - 4y^4)$ sobre o circulo $(x-2)^2 + y^2 = 4$, positivamente orientado.

Questão 4. Verifique o Teorema de Green com o campo $F(x,y) = (3y, 1)$, e λ o caminho cuja imagem é a fronteira positivamente orientada da região interior ao circulo $x^2+y^2 = 25$, e exterior aos 4 círculos de raio 1 e centros em $(2,0), (-2,0), (0,2), (0,-2)$.

Questão 5. Verifique o Teorema de Green ao campo $F(x,y) = (3y, 1)$, da região compreendida entre o circulo $x^2 + y^2 = 9$ e o quadrado $|x| + |y| = 1$.

Questão 6. Suponhamos que S é uma região na que o teorema de Green seja valido e f uma função *armônica* em S. Então prove que $\int_{\partial S^+} \frac{\partial f}{\partial y}\ dx - \frac{\partial f}{\partial x}\ dy = 0$

Questão 7. Considere as integrais

$$I_1 = \int_{\lambda} (2x+y)^2\ dx - (x-2y)^2\ dy$$

$$I_2 = \int_{\lambda} (2x+y)^2\ dx - (x-2y)^2\ dy$$

Onde $\lambda, \mu\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\lambda(t) = (t, t^2)$, $\mu(t) = (t^2, t)$. Usando o teorema de Green calcule a diferença $I_1 - I_2$.

Questão 8. Seja $U = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$ e $P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$, com $(x,y) \in U$. Seja C uma curva de Jordan C^1 por partes em U. Explique porque falha o Teorema de Green se por exemplo C é o circulo unitario $x^2 + y^2 = 1$. Calcule o valor da integral.

Questão 9. Usar o Teorema de Green para determinar o área de um laço da rosa de quatro folhas $r = 3\sin\theta$. Da mesma forma determine o área da região limitada pelo disco com centro en $(0,0)$ e raio R.