Prova P3 MAT 234
5/12/2017 Professor: Sylvain Bonnot

Nome: ____

N$^{\underline{0}}$ USP : ______________________ RG: __________________

Assinatura: ____

Prova (A)	
Q	N
1	
2	
3	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS! Boa sorte!

$1^{\underline{a}}$ **Questão:** (4 pontos) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida tal que $\mu(X) < +\infty$. Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis.

a) Mostre que se $f_n \to f$ quase sempre então $f_n \to f$ em medida.

b) Se $p \in [1, +\infty)$ e se f_n, f são funções em L^p tais que $f_n \to f$ em L^p então mostre que $f_n \to f$ em medida.

(a) Podemos supor que $f_n \to f$ em X.

$\forall m, n \in \mathbb{N}$, seja $E_n(m) := \bigcup_{k \geqslant n} \{x ; |f_k(x) - f(x)| \geqslant \frac{1}{m}\}$. Então $E_{n+1}(m) \subset E_n(m)$.

$f_n \to f$ pontualmente $\Rightarrow \bigcap_n E_n(m) = \phi$, mas $\mu(X) < +\infty$: por isso $\mu(E_n(m)) \to 0$ quando $n \to \infty$, para todo m fixo.

Agora, para $\varepsilon > 0$ dado, podemos achar m tal que $\frac{1}{m} < \varepsilon$. Então $\{x ; |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \subset E_n(m) \Rightarrow \mu(|f_n(x) - f(x)| > \varepsilon) \to 0$.

(b) $\int |f_n - f|^p d\mu \geqslant \int_{|f_n - f| \geqslant \alpha} |f_n - f|^p d\mu \geqslant \alpha^p \mu(|f_n - f| \geqslant \alpha)$, para todo $\alpha > 0$.

Isso implica $\mu(|f_n - f| \geqslant \alpha) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ porque $\int |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (3 pontos)

a) Determine os valores de $p \in [1, +\infty)$ tais que $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}(1+x)}$ seja em $L^p(0,\infty)$.

b) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida com $\mu(X) = 1$, e $f : X \to [0, +\infty)$ uma função integrável. Mostre que se $\mu(\{x; |f(x)| > 0\}) < 1$ então $\lim_{p\to 0^+} \|f\|_p = 0$ (dica: desigualdade de Hölder).

(a) $|f(x)|^p \leqslant \dfrac{1}{|x|^{3p/2}} \in L^1([1,+\infty)) \quad \forall p \geqslant 1.$

Vamos olhar a integrabilidade em $[0,1]$ agora: perto de 0, $|f(x)|^p \sim \dfrac{1}{|x|^{p/2}}$ integrável se e somente se $p<2$.

Concl. : $p \in [1,2)$

(b) Seja $p \in (0,1)$: $\frac{1}{p}$ e $\frac{1}{1-p}$ são conjugados.

$$\text{Hölder} \Rightarrow \int f^p d\mu = \int f^p \cdot 1_{\{f>0\}} d\mu \leqslant \int \left(f^p\right)^{1/p} \Big)^{1/(1/p)} \cdot \left(\int 1_{\{f>0\}}^{1/1-p}\right)^{1/(1/1-p)}$$
$$= \left(\int f\right)^p \cdot \left(\int 1_{\{f>0\}}\right)^{1-p}$$

Conseq: $\|f\|_p \leqslant \left(\int f\, d\mu\right) \cdot \left(\mu\{f>0\}\right)^{\frac{1-p}{p}} \xrightarrow[p\to 0^+]{} 0$ se $\mu\{f>0\}<1$.

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3 pontos)

a) Mostre que $(x,y) \mapsto e^{-y}\mathrm{sen}(2xy)$ é integrável em $[0,1]\times(0,+\infty)$.

b) Utilizando Fubini, determine o valor de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{y}(\mathrm{sen} y)^2 e^{-y} dy$.

ⓐ Tonelli: $\int |f|\, dx\, dy \leq \int_0^\infty e^{-y} dy = 1 < \infty.$

ⓑ Fubini: $I = \int_0^1 dx \int_0^\infty e^{-y} \mathrm{sen}\, 2xy\, dy$. Seja $J = \int_0^\infty e^{-y} \mathrm{sen}\, 2xy\, dy = \underbrace{\left[e^{-y} \cdot \frac{-\cos 2xy}{2x}\right]_0^\infty}_{= \frac{1}{2x}} + \underbrace{\int e^{-y} \frac{-\cos 2xy}{2x} dy}_{= \left[e^{-y} \cdot \frac{-\mathrm{sen} 2xy}{4x^2}\right]_0^\infty - \int -e^{-y} \frac{(-\mathrm{sen}\, 2xy)}{4x^2} dy}$

i.e $J \cdot \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) = \frac{1}{2x}$ i.e $J = \frac{2x}{1+4x^2}$.

Concl.: $I = \int_0^1 \frac{2x}{1+4x^2} dx = \frac{1}{4} \ln(1+4x^2)\Big]_0^1 = \frac{\ln 5}{4}$.