TRANSFORMADA DE FOURIER

① Propriedades básicas:

Def: Dada $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, $\in L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier $\hat{f}$ de f é a função $\hat{f}:\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definida por:

$$\boxed{\hat{f}(u) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{iu.x} f(x)dx}$$

Aqui $u.x = u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ é o produto escalar de $\mathbb{R}^n$.

Outras possivéis definições têm um $\pm 2\pi$ na frente de $iu.x$ e $\frac{1}{2\pi}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ na frente da integral.

Propriedades:

Sejam $f, g \in L^1$, então:

① $\hat{f}$ é limitada e contínua.

② $\widehat{(f+g)} = \hat{f} + \hat{g}$.

③ $\widehat{af} = a\hat{f}$ se $a \in \mathbb{C}$.

④ Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $f_a(x) := f(x+a)$, então $\hat{f}_a = e^{-iu.a}\hat{f}$.

⑤ Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $g_a(x) := e^{ia.x}g(x)$ então $\hat{g}_a(u) = \hat{g}(u+a)$.

⑥ Se $a \in \mathbb{R}^*$ e $h_a(x) = f(ax)$ então $\hat{h}_a(u) = a^{-n}\hat{f}(u/a)$.

Prova: ① $f \in L^1$ e $|e^{iu.x}| \Rightarrow \hat{f}$ limitada.

Agora: $\forall x, u \mapsto e^{iu.x}.f(x)$ é contínua e $|e^{iu.x}.f(x)| \leqslant f(x) \in L^1$

então o teorema de continuidade implica o resultado.

② e ③: linearidade da integral.

④ Observar que: $\widehat{f_a}(u) = \int e^{iu.x} f(x+a)\,dx = \int e^{iu.(x-a)} f(x)\,dx = e^{-iu.a}\hat{f}(u)$.

⑤ $\hat{g}_a(u) = \int e^{iu.x} e^{ia.x} f(x)\,dx = \int e^{i(u+a).x} f(x)\,dx = \hat{f}(u+a)$.

⑥ $\hat{h}_a(u) = \int e^{iu.x} f(ax)\,dx = a^{-n}\int e^{iu.(y/a)} f(y)\,dy = a^{-n}\int e^{i(u/a).y} f(y)\,dy = a^{-n}\hat{f}(u/a)$. $\square$

Transformada de Fourier & derivadas:

Proposição: Suponhamos que $f \in L^1$ e $x_j f(x) \in L^1$ onde x_j é a j-esima coordenada de x. Então:

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial u_j}(u) = i\int e^{iu.x} x_j f(x)\,dx.$$

Prova: teorema de derivação!

Proposição: suponhamos que $f \in L^1$ e $f' \in L^1$. Então $\widehat{f'} = -iu\,\hat{f}(u)$.

Prova: Lema: $f(y) \xrightarrow[y \to \pm\infty]{} 0$

Prova do lema: f' integrável $\Longrightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \int_x^y |f'(z)|\,dz \xrightarrow[x,y \to \infty]{} 0$ (conv. dominada).

Assim $(f(y_n))_{n \geqslant 1}$ é de Cauchy para $y_n \to \infty$, por isso $\lim_{y \to \pm\infty} f(y)$ existe,

mas tem que ser 0 porque f é integrável.

Utilizando o lema e uma integração por partes, temos:

$$\widehat{f'}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f'(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} iu\,e^{iu.x} f(x)\,dx = -iu\,\hat{f}(u). \qquad \square$$

Convolução e transformada de Fourier:

Def: a convolução de duas funções mensuráveis f e g é definida por:

$$\boxed{f * g\,(x) := \int f(x-y)\, g(y)\, dy}\,,$$ se a integral existir.

Obs.: com uma mudança de variáveis temos que $\int f(x-y)\,g(y)\,dy = \int f(y)\,g(x-y)\,dy$

$$\Longrightarrow f*g = g*f.$$

Proposição: sejam $f, g \in L^1$ então $f*g \in L^1$ e $\|f*g\|_1 \leq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Prova: $\int |f*g\,(x)|\,dx \leq \iint |f(x-y)|\,|g(y)|\,dy\,dx \overset{(\text{Tonelli})}{=} \iint |f(x-y)|\,|g(y)|\,dx\,dy$

$$= \left(\int |f(x)|\,dx\right) \cdot \left(\int |g(y)|\,dy\right)$$

$$= \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$$

Proposição: Sejam $f, g \in L^1$ então $\widehat{f * g}(u) = \hat{f}(u)\,\hat{g}(u)$.

Prova: $\widehat{f * g}(u) = \int e^{iu.x} \int f(x-y)\, g(y)\, dy\, dx$

$$\overset{(\text{Fubini})}{=} \iint e^{iu.(x-y)} f(x-y)\, e^{iu.y}\, g(y)\, dx\, dy$$

$$= \int \hat{f}(u)\, e^{iu.y}\, g(y)\, dy$$

$$= \hat{f}(u).\,\hat{g}(u). \qquad \square$$

Teorema de inversão

Suponhamos que f e $\hat{f}$ são em L^1. Então $\boxed{f(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-iu.y}\, \hat{f}(u)\, du, \quad q.s.}$

Isso significa que podemos recuperar f, dada $\hat{f}$.

Para mostrar este teorema, a gente vai precisar de alguns lemas...

Proposição: ① Seja $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f_1(x):=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}$, então $\hat{f}_1(u)=e^{-u^2/2}$.

② Seja $f_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $f_n(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\cdot e^{-|x|^2/2}$ então $\hat{f}_n(u)=e^{-|u|^2/2}$.

Prova: Seja $g(u)=\int e^{iu.x}\, e^{-x^2/2}\,dx$. Podemos aplicar o teorema de diferenciação:

$$g'(u)=i\int \underbrace{e^{iux}}_{=u}\, \underbrace{x e^{-x^2/2}}_{=v'}\,dx=\underbrace{\left[i\, e^{iux}\left(-e^{-x^2/2}\right)\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0}-\int -u\, e^{iux}\left(-e^{-x^2/2}\right)dx=-u\, g(u).$$

Mas podemos resolver a equação diferencial $g'(u)=-u\,g(u)$.

De fato $\left[\log g(u)\right]'=\frac{g'(u)}{g(u)}=-u \Rightarrow \log g(u)=-\frac{u^2}{2}+C_1$

$$\Rightarrow g(u)=C_2\cdot e^{-u^2/2}.$$

Agora $g(0)=\sqrt{2\pi}$, então $C_2=\sqrt{2\pi}$.

Mas $\frac{g(u)}{\sqrt{2\pi}}=e^{-u^2/2}=\int e^{iux}\,\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dx=\hat{f}_1(u)$.

② $\hat{f}_n(u)=\int\cdots\int e^{i\sum_j u_j x_j}\cdot f_1(x_1)\cdots f_1(x_n)\,dx_1\cdots dx_n=\hat{f}_1(u_1)\cdots\hat{f}_1(u_n)=e^{-|u|^2/2}$.

$\square$

Rascunho:

$h(u)=g(u)\,e^{u^2/2}$

$\Rightarrow h'(u)=g'(u)e^{u^2/2}+g(u).u.e^{u^2/2}=0$

$\Rightarrow h(u)=C_2$.

$$\int e^{-x^2}dx\cdot\int e^{-y^2}dy=\int e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$
$$=\int e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$
$$=2\pi\cdot\left[\frac{e^{-r^2}}{-2}\right]_0^{\infty}$$
$$=\pi.$$