Revisão P1

1) Seja Ω um conjunto, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é chamada σ-aditiva se:

a) $\Omega \in \mathcal{F}$, b) A, B disjuntos em $\mathcal{F} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{F}$, c) se $A \supset B$ então $A - B \in \mathcal{F}$, d) se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é crescente, $\bigcup_n A_n \in \mathcal{F}$.

1) Mostre: toda familia $\mathcal{C}$ de subconjuntos de Ω é contida numa menor familia σ-aditiva $\mathcal{C}_\sigma$.

2) se $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ é fechada por intersecção finita então $\mathcal{C}_\sigma = \sigma(\mathcal{C})$.

3) Se $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{C} = \{\text{intervalos abertos}\}$, determine $\mathcal{C}_\sigma$.

---

② Seja X um conjunto, μ uma medida exterior, $A \subset X$.

Mostre: A é μ-mensurável $\Leftrightarrow \forall P \subset A, \forall Q \subset A^c, \mu(P \cup Q) = \mu(P) + \mu(Q)$.

---

③ Seja $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ com φ definida por: $\varphi(\emptyset) = 0$, $\varphi(E) = +\infty$ se $E \subset \mathbb{N}$ é infinito, e $\varphi(E) = \sum_{p \in E} \frac{1}{p^2}$.

Que podemos dizer de φ^*?

④ Seja f derivável em $(0,1)$. Mostre que f' é mensurável.

---

⑤ Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

a) Mostre: $\{x \in \mathbb{R} / f \text{ contínua em } x\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \operatorname{int}\left(f^{-1}\left(r - \frac{1}{k}, r + \frac{1}{k}\right)\right)$, onde $\operatorname{int}(A) =$ interior de A.

b) Mostre: $\{x \in \mathbb{R} / f \text{ contínua em } x\}$ é boreliano.

---

⑥ Seja $(\Omega, \mathcal{M})$ um espaço mensurável, e $\mu : \mathcal{M} \to [0, +\infty]$ uma aplicaçao tal que

$\mu(\emptyset) = 0$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, se os A_i são disjuntos.

Mostre: μ é uma medida $\iff \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n)$ para $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ crescente.