exo: sejam μ, ν medidas σ-finitas em $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

1) mostre que $D_\mu := \{x \in \mathbb{R} ; \mu(\{x\}) > 0\}$ é finito ou enumerável.

2) Seja $\Delta := \{(x,x) ; x \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mu \otimes \nu(\Delta) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}) \nu(\{x\})$.

Resp.:

1) Seja $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ borelianos de $\mathbb{R}$ tais que $\mathbb{R} = \bigcup_{n \geq 0} E_n$ e $\forall n \ \mu(E_n) < \infty$.

Seja $D_n = \{x \in E_n \ / \ \mu(x) \geq \frac{1}{n}\}$. Se D_n é infinito, ele contém uma sequência $(y_m)_{m \geq 1}$,

e então: $\mu(E_n) \geq \mu(D_n) \geq \sum_{m \geq 1} \mu(\{y_m\}) \geq \sum_{m \geq 1} \frac{1}{n} = \infty$ (impossível).

Consequência: D_n é finito. Mas então $D = \bigcup_{n \geq 0} D_n$ é finito ou enumerável.

2) Utilizando ~~Fubini~~-Tonelli:

$$
\begin{aligned}
\mu \otimes \nu(\Delta) &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} 1_\Delta(x,y) \mu(dx) \nu(dy) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{y\}) \nu(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \sum_{x \in D_\mu} \mu(\{x\}) 1_{\{x=y\}} \nu(dy) \\
&= \sum_{x \in D_\mu} \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}) 1_{\{x=y\}} \nu(dy) \\
&= \sum_{x \in D_\mu \cap D_\nu} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}) \\
&= \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\}) \nu(\{x\}).
\end{aligned}
$$