Lema da classe monótona:

Def.: Sejam X um conjunto e $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$. $\mathcal{C}$ é chamada classe monótona se $\mathcal{C} \neq \emptyset$ e:

1) $\mathcal{C}$ é "fechada por reunião crescente": i.e $\forall$ sequência $(E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$, crescente, temos $\bigcup_n E_n \in \mathcal{C}$.

2) $\mathcal{C}$ é "fechada por intersecção decrescente": i.e $\forall (E_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}$, decrescente, temos $\bigcap_n E_n \in \mathcal{C}$.

Exemplo: qualquer σ-álgebra é uma classe monótona.

Exo: dar um exemplo de classe monótona que não seja uma σ-álgebra.

Exo: Seja $\Sigma \subset \mathcal{P}(X)$. Mostre que Σ é uma σ-álgebra se e somente se Σ é uma álgebra e uma classe monótona.

Proposição: Seja $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ uma família de classes monótonas. Então $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ é uma classe monótona.

Def: dada $E \subset \mathcal{P}(X)$, a "classe monótona gerada por E" é a intersecção de todas as classes monótonas $\mathcal{C}$ tais que $E \subset \mathcal{C}$. Ela é denotada por $\mathcal{C}(E)$.

Lema: (Lema da classe monótona) Sejam X um conjunto e $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra.

Então $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Prova: 1) $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$: verdadeiro, porque cada σ-álgebra é uma classe monótona.

2) $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$: é suficiente mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma σ-álgebra.

Na verdade, é suficiente mostrar: $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma álgebra. Simplesmente, porque se $(E_n)_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, então os $F_n := E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ são em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ (porque $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma álgebra), mas então $\bigcup_n E_n = \bigcup_n F_n \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ (porque $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ contem reuniões de sequências crescentes).

Resumo: vamos mostrar que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma álgebra.

Para todo $E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, defina $C(E) := \{F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}) \,/\, E-F \in \mathcal{C}(\mathcal{A}), F-E \in \mathcal{C}(\mathcal{A}), F\cap E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})\}$.

Obs.: por simetria, dados $E, F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $F \in C(E) \iff E \in C(F)$.

Lema: $\forall E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $C(E)$ é uma classe monótona.

Prova do lema:

a) $C(E) \neq \emptyset$ porque $E \in C(E)$.

b) Se $(F_n)_{n\geq 1} \subset C(E)$ é crescente, então: 1) $\left(\bigcup_n F_n\right) - E = \bigcup_n (F_n - E) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$

2) $E - \left(\bigcup_n F_n\right) = \bigcap_n (E - F_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

3) $E \cap \left(\bigcup_n F_n\right) = \bigcup_n (E\cap F_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

c) Se $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seq. $\searrow$ de elementos de $C(E)$:

1) $\left(\bigcap_n F_n\right) - E = \bigcap_n (F_n - E) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$

2) $E - \left(\bigcap_n F_n\right) = \bigcup_n (E - F_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$

3) $E \cap \left(\bigcap_n F_n\right) = \bigcap_n (E \cap F_n) \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Concl.: $C(E)$ é uma classe monótona $\square$ (Fim prova lema).

Lema: $\forall A \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $C(A) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Prova: Seja $A \in \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ é álgebra $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{A}, A-B, B-A$ e $A\cap B \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$

$\Rightarrow C(A)$ contem B, $\forall B \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A} \subset C(A)$.

Mas, $C(A)$ é uma classe monótona, que contem $\mathcal{A} \Rightarrow C(A) \supset \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Lembrando que por definição temos $C(A) \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$, a conclusão é que $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = C(A)$. $\square$ Fim prova lema.

Em resumo: dado $F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, temos que: $\forall A \in \mathcal{A}$, $F \in C(A)$, mas isso é equivalente a $A \in C(F)$. Isto é, $\mathcal{A} \subset C(F)$ $\forall F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Mas, $C(F)$ é uma classe monótona, então $C(F) \supset \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Já tinhamos $C(F) \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$, então $C(F) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Conclusão: até agora, temos: $\forall E \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$, $C(E) = \mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Agora: sejam $E, F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$: temos que $E-F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ e $E \cap F \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$. Mas $X \in \mathcal{A} \subset \mathcal{C}(\mathcal{A})$, por isso $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é fechada por complementação e intersecção finita: ou seja $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ é uma álgebra. $\square$ Fim da demonstração.