Lógica de Predicados

Prof. Dr. Silvio do Lago Pereira

slago@ime.usp.br

1 Introdução

Há vários tipos de argumentos que não podem ser adequadamente formalizados em lógica proposicional. Como exemplo, considere o argumento a seguir:

Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal.

Intuitivamente, podemos ver que esse argumento é válido. No entanto, usando lógica proposicional, a formalização desse argumento resulta em $\{p, q\} \models r$ e não há como mostrar que a conclusão r é uma conseqüência lógica das premissas p e q. Isso acontece porque a validade desse argumento depende do significado da palavra *todo*, que não pode ser expresso na lógica proposicional. De fato, para tratar argumentos desse tipo precisamos da *lógica de predicados* [3].

2 Sintaxe da lógica de predicados

Além dos conectivos lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$ e $\rightarrow$), as fórmulas bem-formadas da lógica de predicados são compostas por *objetos*, *predicados*, *variáveis* e *quantificadores*.

2.1 Objetos e predicados

Na lógica de predicados, a noção de *objeto* é usada num sentido bastante amplo. Objetos podem ser concretos (e.g., esse livro, a lua), abstratos (e.g., o conjunto vazio, a paz), ou fictícios (e.g., unicórnio, Saci Pererê). Objetos podem ainda ser atômicos ou compostos (e.g., um teclado é composto de teclas). Em suma, um objeto pode ser qualquer coisa a respeito da qual precisamos dizer algo [3]. Por convenção, nomes de objetos são escritos com inicial minúscula e assumimos que nomes diferentes denotam objetos diferentes.

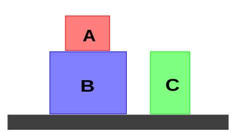


Figura 1. Blocos empilhados sobre uma mesa.

Um *predicado* denota uma relação entre objetos de um determinado contexto de discurso [3]. Por exemplo, no contexto ilustrado na Figura 1, podemos dizer que o bloco a está sobre o bloco b usando o predicado *sobre* e escrevendo $sobre(a, b)$; para dizer que o bloco b é azul, podemos usar o predicado *cor* e escrever $cor(b, azul)$ e, para dizer que o bloco b é maior que o bloco c, podemos usar o predicado *maior* e escrever $maior(b, c)$. Por convenção, nomes de predicados são escritos com inicial minúscula.

2.2 Variáveis e quantificadores

Grande parte da expressividade da lógica de predicados é devida ao uso dos conectivos lógicos, que nos permitem formar senteças complexas a partir de sentenças mais simples. Por exemplo, considerando o contexto da Figura 1, podemos dizer que o bloco a está sobre o bloco b e que este está sobre a mesa escrevendo:

$sobre(a, b) \wedge sobre(b, mesa)$

Entretanto, o que realmente torna a lógica de predicados mais expressiva que a lógica proposicional é a noção de variáveis e quantificadores:

– usando *variáveis*, podemos estabelecer fatos a respeito de objetos de um determinado contexto de discurso, sem ter que nomear explicitamente esses objetos (por convenção, nomes de variáveis são escritos com inicial maiúscula);
– usando o quantificador *universal* ($\forall$), podemos estabelecer fatos a respeito de todos os objetos de um contexto, sem termos que enumerar explicitamente todos eles; e, usando o quantificador *existencial* ($\exists$) podemos estabelecer a existência de um objeto sem ter que identificar esse objeto explicitamente.

Por exemplo, considerando novamente o contexto da Figura 1, podemos dizer que todo bloco está sobre alguma coisa (bloco ou mesa) escrevendo:

$\forall X[bloco(X) \rightarrow \exists Y[sobre(X, Y)]]$

3 Semântica da lógica de predicados

O significado das fórmulas na lógica de predicados depende da semântica dos conectivos e da interpretação de objetos e predicados [3,2]. Uma *interpretação* na lógica de predicados consiste de:

– um conjunto $\mathcal{D} \neq \emptyset$, denominado *domínio da interpretação*;
– um mapeamento que associa cada objeto a um elemento fixo em $\mathcal{D}$;
– um mapeamento que associa cada predicado a uma relação em $\mathcal{D}$.

O quantificador $\forall$ denota uma conjunção e o quantificador $\exists$ denota uma disjunção. Por exemplo, para $\mathcal{D} = \{a, b, c\}$, a fórmula $\forall X[colorido(X)]$ denota a conjunção $colorido(a) \wedge colorido(b) \wedge colorido(c)$ e a fórmula $\exists X[cor(X, azul)]$ denota a disjunção $cor(a, azul) \vee cor(b, azul) \vee cor(c, azul)$. Além disso, como $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \vee \neg\beta)$, é fácil ver que $\neg\forall X[cor(X, azul)] \equiv \exists X[\neg cor(X, azul)]$. De modo análogo, concluímos que $\neg\exists X[cor(X, roxo)] \equiv \forall X[\neg cor(X, roxo)]$.

4 Formalização de argumentos

Usando a lógica de predicados, o argumento que apresentamos inicialmente

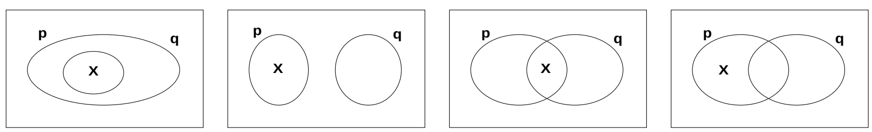
Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal.

pode ser formalizado como:

$\{\ homem(socrates),\ \forall X[homem(X) \rightarrow mortal(X)]\ \} \models mortal(socrates)$

4.1 Enunciados categóricos

Para facilitar a formalização de argumentos na lógica de predicados, destacamos quatro tipos de sentenças de especial interesse, denominadas *enunciados categórigos*.



(a) (b) (c) (d)

Figura 2. Semântica dos enunciados categóricos em termos de conjuntos.

- **Universal afirmativo:** são enunciados da forma $\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$. Em termos de conjuntos, um enunciado universal afirmativo estabelece que o conjunto p é um subconjunto do conjunto q (Figura 2-a). Por exemplo, a sentença "*Todos os homens são mortais*" pode ser traduzida como $\forall X[h(X) \rightarrow m(X)]$, ou seja, para todo X, se $X \in p$ então $X \in m$.
- **Universal negativo:** são enunciados da forma $\forall X[p(X) \rightarrow \neg q(X)]$. Em termos de conjuntos, um enunciado universal negativo estabelece que os conjuntos p e q são disjuntos (Figura 2-b). Por exemplo, a sentença "*Nenhum homem é extra-terrestre*" pode ser traduzida como $\forall X[h(X) \rightarrow \neg e(X)]$, ou seja, para todo X, se $X \in h$ então $X \notin e$.
- **Particular afirmativo:** são enunciados da forma $\exists X[p(X) \wedge q(X)]$. Em termos de conjuntos, um enunciado universal afirmativo estabelece que os conjuntos p e q têm uma interseção não-vazia (Figura 2-c). Por exemplo, a sentença "*Alguns homens são cultos*" pode ser traduzida como $\exists X[h(X) \wedge c(X)]$, ou seja, existe X tal que $X \in h$ e $X \in c$.
- **Particular negativo:** são enunciados da forma $\exists X[p(X) \wedge \neg q(X)]$. Em termos de conjuntos, um enunciado universal negativo estabelece que existem elementos que estão no conjunto p mas não estão no conjunto q (Figura 2-d). Por exemplo, a sentença "*Alguns homens não são cultos*" pode ser traduzida como $\exists X[h(X) \wedge \neg c(X)]$, ou seja, existe X tal que $X \in h$ e $X \notin c$.

Reconhecer o tipo de uma sentença facilita a sua tradução para a linguagem da lógica de predicados. Veja outros exemplos:

- "*Toda cobra é venenosa*": $\forall X[cobra(X) \rightarrow venenosa(X)]$
- "*Os remédios são perigosos*": $\forall X[remedio(X) \rightarrow perigoso(X)]$
- "*Nenhuma bruxa é bela*": $\forall X[bruxa(X) \rightarrow \neg bela(X)]$
- "*Não existe bêbado feliz*": $\forall X[bebado(X) \rightarrow \neg feliz(X)]$
- "*Algumas pedras são preciosas*": $\exists X[preda(X) \wedge preciosa(X)]$
- "*Existem plantas que são carnívoras*": $\exists X[planta(X) \wedge carnivora(X)]$
- "*Alguns políticos não são honestos*": $\exists X[politico(X) \wedge \neg honesto(X)]$
- "*Há aves que não voam*": $\exists X[ave(X) \wedge \neg voa(X)]$

Exercício 1 *Usando lógica de predicados, formalize as sentenças a seguir:*

- *Tudo que sobe, desce.*
- *Nenhum leão é manso.*
- *Todo circo tem palhaço.*
- *Toda pedra preciosa é cara.*
- *Nenhum homem é infalível.*
- *Ninguém gosta de impostos.*
- *Existem impostos que não são bem empregados.* □

4.2 Equivalência entre sentenças

Há sentenças que podem ser escritas, equivalentemente, de mais de uma forma. Por exemplo, considere a sentença "*Nem tudo que brilha é ouro*". Ora, se nem tudo que brilha é ouro, então significa que exite alguma coisa que brilha e não é ouro. Assim, a sentença "*Nem tudo que brilha é ouro*" pode ser escrita como $\neg\forall X[brilha(X) \rightarrow ouro(X)]$ ou como $\exists X[brilha(X) \wedge \neg ouro(X)]$. Para ver que isso é verdade, verifique as equivalências a seguir:

$$\neg\forall X[brilha(X) \rightarrow ouro(X)]$$
$$\equiv \neg\forall X[\neg brilha(X) \vee ouro(X)]$$
$$\equiv \exists X\neg[\neg brilha(X) \vee ouro(X)]$$
$$\equiv \exists X[brilha(X) \wedge \neg ouro(X)]$$

Há também sentenças mais complexas como, por exemplo, "*Nem todo ator americano é famoso*". Nesse caso, o antecedente da fórmula condicional deve ser uma conjunção, veja: $\neg\forall X[ator(X) \wedge americano(X) \rightarrow famoso(X)]$. Uma interpretação dessa sentença seria a seguinte: ora, se nem todo ator americano é famoso, então deve existir ator americano que não é famoso. Assim, a sentença também poderia ser traduzida como $\exists X[ator(X) \wedge americano(X) \wedge \neg famoso(X)]$. A equivalência entre essas duas formas de traduzir a sentença é demonstrada a seguir:

$\neg\forall X[ator(X) \land americano(X) \rightarrow famoso(X)]$
$\equiv \neg\forall X[\neg(ator(X) \land americano(X)) \lor famoso(X)]$
$\equiv \neg\forall X[\neg ator(X) \lor \neg americano(X) \lor famoso(X)]$
$\equiv \exists X\neg[\neg ator(X) \lor \neg americano(X) \lor famoso(X)]$
$\equiv \exists X[ator(X) \land americano(X) \land \neg famoso(X)]$

Exercício 2 *Verifique se as sentenças a seguir são equivalentes:*

– *"Nem toda estrada é perigosa" e "Algumas estradas não são perigosas".*
– *"Nem todo bêbado é fumante" e "Alguns bêbados são fumantes".*

5 Inferência na lógica de predicados

Inferir conclusões corretas, a partir de um conjunto de premissas, é uma importante característica de todo sistema lógico. Para entendermos como a inferência pode ser realizada na lógica de predicados, vamos considerar o argumento:

$\{homem(socrates), \forall X[homem(X) \rightarrow mortal(X)]\} \models mortal(socrates)$

Normalizando[1] essas fórmulas, obtemos:

$\{homem(socrates), \neg homem(X) \lor mortal(X)\} \models mortal(socrates)$

Observe que a regra de inferência por resolução não pode ser aplicada diretamente para deduzir que Sócrates é mortal, pois as fórmulas $homem(socrates)$ e $homem(X)$ não são complementares. Entretanto, como a variável X é universal, podemos substituí-la por qualquer constante do domínio. Então, fazendo $X = socrates$, obtemos uma nova instância da fórmula $\neg homem(X) \lor mortal(X)$ e, assim, podemos inferir a conclusão desejada. Veja:

(1)	$homem(socrates)$	Δ
(2)	$\neg homem(socrates) \lor mortal(socrates)$	Δ/X=socrates
(3)	$mortal(socrates)$	$RES(1,2)$

5.1 Instanciação universal e variáveis existenciais

Infelizmente, o princípio de *instanciação universal*, que nos permite substituir uma variável por uma constante, só funciona corretamente para variáveis universais [4]. Para entender o porquê, considere a sentença "*Todo mestre tem um discípulo*", que pode ser traduzida como:

$\forall X[mestre(X) \rightarrow \exists Y[discipulo(Y, X)]]$

Sendo X uma variável universal, podemos substituí-la por qualquer constante e a sentença obtida continuará sendo verdadeira. Particularmente, poderíamos fazer $X = xisto$ e obter a seguinte instância:

$mestre(xisto) \rightarrow \exists Y[discipulo(Y, xisto)]$.

[1] Na forma normal, todas as variáveis são universais.

Note que se $mestre(xisto)$ for verdade, a semântica da sentença original forçará $\exists Y[discipulo(Y, xisto)]$ a ser verdade também e, como $\top \rightarrow \top \equiv \top$, concluímos que a instância obtida é verdadeira. Por outro lado, se $mestre(xisto)$ for falso, independentemente do valor da fórmula $\exists Y[discipulo(Y, xisto)]$, a instância obtida também é verdadeira, pois $\bot \rightarrow \bot \equiv \top$ e $\bot \rightarrow \top \equiv \top$.

Agora, substituindo a variável existencial, obtemos a instância:

$\forall X[mestre(X) \rightarrow [discipulo(xisto, X)],$

que estabelece que "*Todo mestre tem um discípulo chamado Xisto*". Evidentemente, o significado da sentença original foi alterado. Isso acontece porque o valor de Y depende do valor escolhido para X.

5.2 Skolemização

Uma forma de eliminar uma variável existencial, sem alterar o significado da sentença original, é admitir a existência de uma função que representa o valor correto para substituir a variável existencial. Por exemplo, poderíamos substituir a variável existencial Y pela função $seguidor(X)$, veja:

$\forall X[mestre(X) \rightarrow [discipulo(seguidor(X), X)]$

Note que, nessa instância, o significado da sentença original é mantido; já que ela não se compromete com nenhum valor particular de Y.

No processo de *skolemização*[2], cada variável existencial é substituída por uma função distinta, cujos argumentos são as variáveis universais, globais[3] à variável existencial em questão [1]. Por exemplo, podemos eliminar a variável existencial em $\forall X, Y[p(X, Y) \rightarrow \exists Z \forall W[q(Z, X) \wedge q(W, Z)]]$ fazendo $Z = f(X, Y)$. Caso não haja uma variável universal global à variável existencial a ser skolemizada, podemos usar uma função sem argumentos (ou uma constante). Por exemplo, para eliminar a variável X em $\exists X \forall Y[p(X) \rightarrow q(Y)]$ podemos fazer $X = f$.

Daqui em diante, assumiremos que todas as variáveis são universais (já que as variáveis existenciais sempre podem ser eliminadas) e, portanto, os quantificadores (universais) ficarão implícitos.

Exercício 3 *Formalize as sentenças e skolemize as fórmulas obtidas:*

- *Todo cão é fiel ao seu dono.*
- *Existe um lugar onde todos são felizes.* □

5.3 Unificação

Como vimos, a inferência por resolução requer que as fórmulas atômicas canceladas sejam idênticas (a menos da negação que deve ocorrer numa delas). O processo que determina que substituições são necessárias para tornar duas fórmulas

[2] Proposto e demonstrado pelo matemático Thoralf Skolem.
[3] Uma variável é global à outra se é declarada antes dessa outra.

atômicas sintaticamente idênticas é denominado *unificação*. Nesse processo, uma variável pode ser substituída por uma constante, por uma variável ou por uma função. Por exemplo, podemos unificar $gosta(ana, X)$ e $gosta(Y, Z)$, fazendo $Y = ana$ e $X = Z$. Também podemos unificar $ama(deus, Y)$ e $ama(X, filho(X))$, fazendo $X = deus$ e $Y = filho(deus)$. Já as fórmulas atômicas $igual(X, X)$ e $igual(bola, bala)$ não podem ser unificadas; pois, fazendo $X = bola$, obtemos $igual(bola, bola)$ e $igual(bola, bala)$. Como $bola$ e $bala$ são constantes distintas, não existe substituição que torne essas fórmulas atômicas idênticas. Também não é possível substituir uma variável por uma função que tenha essa mesma variável como parâmetro, como por exemplo, $X = f(X)$.

Para unificar duas fórmulas atômicas (sem variáveis em comum):

1. Compare as fórmulas até encontrar uma incorrespondência ou atingir o final de ambas;
2. Ao encontrar uma incorrespondência:
   (a) se ela não envolver pelo menos uma variável, finalize com *fracasso*;
   (b) caso contrário, substitua todas as ocorrências da variável pelo outro termo e continue a varredura (no passo 1);
3. Ao atingir o final de ambas, finalize com *sucesso*.

Exercício 4 *Unifique (se possível) as fórmulas atômicas a seguir:*

- $cor(sapato(X), branco)$ *e* $cor(sapato(suspeito), Y)$
- $mora(X, casa(mae(X)))$ *e* $mora(joana, Y)$
- $primo(X, Y)$ *e* $prima(A, B)$
- $ponto(X, 2, Z)$ *e* $ponto(1, W)$
- $p(f(Y), Y, X)$ *e* $p(X, f(a), f(Z))$ □

Referências

1. AMBLE, T. *Logic Programming and Knowledge Engineering*, Addison-Wesley, 1987.
2. BRACHMAN, R. J. & LEVESQUE, H. J. *Knowledge Representation and Reasoning*, Morgan Kaufmann, 2004.
3. GENESERETH, M. R. AND NILSSON, N. J. *Logical Fundations of Artificial Intelligence*, Morgan Kaufmann Publishers, 1988.
4. RICH, E. AND KNIGHT, K. *Inteligência Artificial*, 2^a ed., Makron Books, 1995.