Curso: Logística e Transportes
Disciplina: Estatística
Profa. Eliane Cabariti

PROBABILIDADE

Dizemos que a probabilidade é uma “medida” da quantidade de incerteza que existe em um determinado experimento. Assim, **só falaremos de probabilidade quando estivermos diante de um experimento aleatório** (experimento no qual existe um componente devido ao acaso).

Nas experiências feitas no laboratório de Física, por exemplo, não existe, ou não deveria existir esse componente. Neste caso, chamaremos de experiências determinísticas: podemos conhecer o resultado final antes mesmo da realização do experimento. As experiências realizadas no laboratório de Química também são determinísticas. Em uma experiência aleatória não podemos saber o resultado com antecedência, mas podemos enumerar todas as possibilidades de resultados. Por exemplo, quando uma criança é concebida, não podemos conhecer seu sexo, mas sabemos que será menino ou menina. Assim, conhecemos as possibilidades, mas não o resultado final.

Pierre-Simon LAPLACE, matemático francês, publicou um livro, no ano de 1825, no qual fazia um estudo aprofundado sobre a Teoria das Probabilidades. Neste livro ele colocou axiomas para tentar generalizar o que estava sendo feito até aquela época. O segundo axioma fornece a definição de probabilidades que conhecemos hoje quando trabalhamos com casos igualmente possíveis (por exemplo, cada região da roleta, independentemente do número que a representa). Para Laplace, a probabilidade é a relação entre o número de casos favoráveis e o número total de casos possíveis. Note que a probabilidade é, assim, um valor expresso por uma razão.

Traduzindo em linguagem matemática, se A é o evento do qual estamos procurando a probabilidade, então **P(A) =** $\frac{n^o \text{ de resultados favoráveis}}{\text{nº total de resultados possíveis}}$

O número de casos favoráveis de um evento pode ser no máximo igual ao número total de resultados possíveis. Portanto o valor de P(A) é no máximo igual a 1. No caso de não existir casos favoráveis P(A) será, evidentemente, igual a 0 pois o numerador da fração será zero.

Espaço Amostral

Consideremos o seguinte experimento aleatório: jogue um dado e observe o número mostrado na face de cima.

A primeira tarefa consiste em descrever todos os possíveis resultados do experimento e calcular o seu número. De outra forma: *explicitar qual é o conjunto de possíveis resultados do experimento e calcular o número de elementos contidos nele.* Este conjunto é chamado Espaço Amostral.

Os elementos do espaço amostral são chamados eventos elementares. Os subconjuntos do espaço amostral serão chamados eventos.

Como os eventos são conjuntos podemos aplicar aos mesmos as operações usuais dos conjuntos. Isto é:

- ✓ **O evento união $A \cup B$ ocorrerá se pelo menos um dos eventos A ou B ocorrer.**
- ✓ **O evento intersecção $A \cap B$ ocorrerá se ambos os eventos A e B ocorrerem.**
- ✓ **O evento complementar $\bar{A}$ ocorrerá se A não ocorrer.**
- ✓ **O evento diferença $A - B$ ocorrerá se A ocorrer e B não ocorrer.**

A segunda tarefa consiste em calcular a probabilidade de ocorrer um evento A Consideremos o caso do evento $A = \{2,4,6\}$. Intuitivamente se repetirmos o experimento um grande número de vezes obteremos um número par em aproximadamente a metade dos casos; ou seja, o evento A vai ocorrer mais ou menos a metade das vezes. O que está por trás dessa intuição é o seguinte:

a) os eventos elementares são todos igualmente “prováveis”;
b) o número de elementos de A é justamente a metade dos elementos do espaço amostral (Ω) ;

Laplace referia-se aos elementos de A (ou eventos elementares que compõem A) como os *casos favoráveis*. Os elementos do espaço amostral Ω eram chamados *casos possíveis*. Defina então

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Conseqüências imediatas desta definição são as seguintes propriedades:

1) Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$;
2) $P(\Omega) = 1$
3) $P(O) = 0 \quad (\text{porque } \#(O) = 0)$;
4) Se $A \cap B = O$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. - **teorema da soma**
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6) $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ - **teorema do produto**

Distribuições de Probabilidades

O conceito de variável aleatória nos permite associar aos resultados de um experimento aleatório, números reais para que, utilizando o conceito de função, possamos calcular mais facilmente as probabilidades de ocorrência dos vários eventos correspondentes a esse experimento. Consideramos, então, variável aleatória como uma função definida no espaço amostral Ω e que assume valores no conjunto dos números reais.

Uma variável aleatória poderá ser discreta ou contínua, conforme os seus possíveis valores formem um conjunto enumerável de valores ou intervalos contínuos da reta real.

Consideremos o seguinte exemplo:

No jogo da Sena são sorteadas 6 dezenas distintas entre as dezenas 01, 02, 03, ... , 50. O apostador escolhe 6 dezenas e é premiado se são sorteadas 4 (quadra), 5 (quina) ou 6 (sena principal). Determine a probabilidade de um apostador fazer:

a) uma quadra;
b) uma quina;
c) a sena principal.

Nesse exemplo fica então definida a seguinte distribuição de probabilidade, que fornece as probabilidades de ocorrências de cada um dos possíveis resultados do experimento aleatório, por meio das probabilidades assumidas pelos possíveis valores da variável aleatória.

x	P (X=x)
0	44,422536
1	41,005418
2	12,814190
3	1,666890
4	0,089298
5	0,001661
6	0,000006
Total	99,999999

Indicando as probabilidades de ocorrência de cada um dos valores da variável aleatória X por $P(x_i)=P(X=x_i)$, devem ser satisfeitas as seguintes condições:
1ª) $P(x_i)\geq 0,$ para todo i;
2ª) $\sum_{i=1}^{n} P(x_i)=1$.

Distribuição Binomial

Consideremos agora um experimento com apenas dois resultados possíveis, que chamaremos de sucesso e fracasso.
Por exemplo:
a) Jogamos uma moeda não viciada e pomos sucesso = cara, fracasso = coroa.
b) De uma urna que contém 6 bolas brancas e 4 bolas pretas, sacamos uma bola e pomos sucesso = a bola é preta; fracasso = a bola é branca.

Esses experimentos são conhecidos como experimentos de Bernoulli ou ensaios de Bernoulli. Chamaremos de p a probabilidade de sucesso e $q=1-p$ a probabilidade de fracasso.

Devemos ressaltar que qualquer um dos dois resultados possíveis do experimento poderá ser chamado de sucesso, para isso bastando que a sua probabilidade de ocorrência seja indicada por ***p***.

Teorema Binomial: A probabilidade de ocorrerem exatamente k sucessos em uma seqüência de n provas independentes, na qual a probabilidade de sucesso em cada prova é p, é igual a

$$P(x=k) = \binom{n}{k} p^k \, q^{(n-k)}$$

Exemplo:
Sabe-se que numa linha de produção 10% das peças são defeituosas, e as peças são acondicionadas em caixas com 5 unidades. Seja X a variável aleatória igual ao número de peças defeituosas encontradas numa caixa, determine:
a) a probabilidade de uma caixa conter exatamente 3 peças defeituosas;
b) a probabilidade de uma caixa conter duas ou mais peças defeituosas.

Exercícios:

1) A tabela a seguir mostra o tipo de sangue de um grupo de funcionários de uma empresa.

Tipo do Sangue	**Fator RH**	
	Positivo	**Negativo**
O	620	800
A	460	650
B	350	350
AB	530	0

Um funcionário é sorteado ao acaso. Qual é a probabilidade que ele tenha sangue:

a) do tipo O?
b) RH positivo (RH+)?
c) do tipo B e com RH + ?
d) do tipo AB ou do tipo A?
e) RH + ou RH – ?
f) do tipo AB com RH – ?
g) Sabendo que o funcionário tem sangue do tipo B, qual a probabilidade que tenha fator RH+?

2) Uma empresa entrevistou 300 de seus funcionários a respeito de 3 embalagens A,B e C para o lançamento de um novo produto. O resultado foi o seguinte:

160 indicaram a embalagem A;
120 indicaram a embalagem B;
90 indicaram a embalagem C;
30 indicaram as embalagens A e B;
40 indicaram as embalagens A e C;
50 indicaram as embalagens B e C;
10 indicaram as três embalagens.

Qual a probabilidade de que um funcionário:
a) Não escolha nenhuma das três embalagens;
b) Não escolha a embalagem C;
c) Não escolham as embalagens B ou C

3) Uma cidade tem 30.000 habitantes e três jornais A, B e C. Uma pesquisa de opinião revela que:

12.000 lêem A;
8.000 lêem B;

7.000 lêem A e B; 6.000 lêem C;
4.500 lêem A e C; 1.000 lêem B e C; 500 lêem A,B e C.

Qual é a probabilidade de que um habitante leia:

a) pelo menos um jornal;
b) só um jornal.

4) Uma empresa possui 2.400 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo:

Idade	Homem	Mulher
Menos do que 25 anos	317	259
Entre 25 e 40 anos	1.057	527
Mais do que 40 anos	186	54

Se um empregado for selecionado ao acaso, calcule a probabilidade de que ele seja:

a) um empregado com até 40 anos de idade;
b) homem entre 25 e 40 anos de idade;
c) mulher ou tenha mais do que 40 anos de idade;

5) Se 20% das peças produzidas por uma máquina acusam defeito, determine a probabilidade de que, em 4 peças escolhidas ao acaso tenhamos:
a) uma peça defeituosa;
b) nenhuma peça defeituosa;
c) menos de duas peças defeituosas.

6) A probabilidade de um estudante que entra na Universidade se formar é 0,4. Dentre cinco estudantes escolhidos ao acaso, determine a probabilidade de que:
a) nenhum consiga se formar;
b) apenas um consiga se formar;
c) ao menos um se forme.

7) Jogamos uma moeda não viciada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obtermos exatamente 5 caras?

8) Sabendo-se que para determinado tipo de peça a probabilidade de se produzir uma peça defeituosa é de 0,02, calcule a probabilidade de que em 10 dessas peças, escolhidas ao acaso da produção tenhamos:
a) nenhuma peça defeituosa;
b) apenas uma peça defeituosa;
c) pelo menos duas peças defeituosas;
d) no máximo duas peças defeituosas.