Curso: Logística e Transportes
Disciplina: Estatística
Profa. Eliane Cabariti

ETEC FATEC CARAPICUIBA

Medidas de Posição

Depois de se fazer a coleta e a representação dos dados de uma pesquisa, é comum analisarmos as tendências que essa pesquisa revela. Assim se a pesquisa envolve muitos dados, convêm sintetizarmos todas essas informações a um mínimo de parâmetros que possam caracterizá-la. Esses parâmetros podem ser de:

- **centralização**: média aritmética, mediana e moda.
- **separatrizes**: mediana, quartis e percentis.
- **dispersão**: intervalo de variação, desvio médio, variância e desvio padrão.

Média Aritmética ($\bar{x}$ ou μ)

A média caracteriza o ponto de equilíbrio da distribuição de freqüências, sendo, por isso uma medida de posição.

1. Dados não agrupados

Exemplo: Se X : 2, 0, 5, 3; então:

$$\bar{x} = \frac{2+0+5+3}{4} = 2{,}5$$

2. Dados agrupados sem intervalos de classe (média aritmética ponderada)

Se os dados estão apresentados na forma de uma variável discreta faremos a média aritmética ponderada considerando as freqüências simples de f_i como sendo as ponderações dos elementos x_i correspondentes:

Exemplo: Considerando a distribuição:

x_i	f_i
2	1
4	3
5	2

$$\overline{X} = \frac{2.1+4.3+5.2}{1+3+2} = \frac{2+12+10}{6} = 4$$

3. Dados agrupados com intervalos de classe

Quando os dados estão agrupados, se aceita, por convenção, que as freqüências se distribuem uniformemente ao longo da classe e que, portanto, o ponto médio da classe é o valor representativo do conjunto. Neste caso a média será calculada fazendo a média aritmética ponderada considerando as freqüências simples de f_i como sendo as ponderações dos elementos x_i correspondentes, onde x_i é o ponto médio do intervalo.

Exemplo: Considere a distribuição:

classe	f_i	x_i
[180, 200[	4	190
[200, 220[	18	210
[220, 240[	10	230
[240, 260[	5	250
[260, 280[	3	270

$$\overline{X} = \frac{190.4 + 210.18 + 230.10 + 250.5 + 270.3}{4 + 18 + 10 + 5 + 3} = \frac{8900}{40} = 222{,}50$$

Moda (Mo)

A moda de uma série de valores é o valor de maior freqüência absoluta,ou seja, o valor que aparece o maior número de vezes na distribuição.

1. Dados não agrupados

Exemplos:

1) Dada a série: 2, 0, 0, 5, 3 ; então: **Mo** = 0

2) Dada a série: 1, 2, 3, 4, 5, 6; não existe valor mais presente, portanto neste caso a série é amodal.

3) Dada a série: 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 6, teremos dois valores modais 2 e 3. Dizemos, então, que a série é bimodal.

Mo = 2 e **Mo** = 3.

2. Dados agrupados sem intervalos de classe

Exemplo: Considerando a distribuição:

x_i	f_i
2	1
4	3
5	2

1. O valor de freqüência máxima é o 4. Logo **Mo = 4**

3. Dados agrupados com intervalos de classe

Neste caso, a classe que apresenta a maior freqüência é denominada classe modal. No caso de distribuição de freqüências em classes de mesma amplitude, a moda corresponde a um ponto pertencente à classe modal dado por:

$$Mo = L_{Mo} + \left(\frac{D_1}{D_1 + D_2} \right).h$$

L_{Mo} = limite inferior da classe modal
$D_1 = f_{mo} - f_{ant}$
$D_2 = f_{mo} - f_{post}$

f_{Mo} = freqüência da classe modal
f_{ant} = freqüência da classe imediatamente anterior à classe modal
f_{post} = freqüência da classe imediatamente posterior à classe modal
h = amplitude do intervalo da classe modal

Exemplo: Considere a distribuição:

i	classe	f_i
1	[180, 200[	4
2	[200, 220[	18
3	[220, 240[	10
4	[240, 260[	5
5	[260, 280[	3

Temos:

$D_1 = 18 - 4 = 14$
$D_2 = 18 - 10 = 8$

$$M_o = 200 + \left(\frac{14}{14 + 8} \right).20 = 200 + \frac{14}{22}.20 = 212{,}7$$

Mediana (Md)

A mediana de um conjunto de valores, colocados em rol, é o valor situado de tal forma no conjunto que o separa em dois subconjuntos de mesmo número de elementos (elemento que ocupa a posição central).

1. Dados não agrupados

Exemplos:

1) Dada a série: 37, 28, 40, 41, 45, 37, 37, 41, 44
   Colocando os dados em rol temos: 28, 37, 37, 37, **40**, 41, 41, 44, 45.

   A distribuição tem um número ímpar (9) de dados. Há quatro valores à esquerda de 40 e quatro valores à direita de 40. Dizemos que o valor central dessa distribuição, 40, é a mediana.

   Md = 40

2) A série: 25, 27, 28, 30, 32, 34, 38, 40, tem um número par (8) de elementos, não existe um valor central, mas dois valores centrais:

   25, 27, 28, **30, 32**, 34, 38, 40

   Neste caso a mediana será a media aritmética dos valores centrais:

$$\text{Md} = \frac{30+32}{2} = 31 \Rightarrow \textbf{Md} = 31$$

Observe:

Sendo **n** o número de elementos da série, devemos determinar a posição do valor mediano. O valor mediano será:

- o termo de ordem $\frac{n+1}{2}$, se **n** for ímpar.
- a média aritmética dos termos de ordem $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}$ + 1, se **n** for par

❖ **A mediana não precisa ser um dos valores da distribuição.**

2. Dados agrupados sem intervalos de classe

Para determinarmos à mediana de uma distribuição de dados discreta, calculamos $\sum f_i$ e dividimos por 2, obtendo desta forma a posição do valor mediano. A mediana será o valor da variável que corresponde à freqüência acumulada imediatamente superior ao valor encontrado.

Exemplos:

a) n é ímpar

Considerando a distribuição:

x_i	f_i	F_i
12	3	3
14	5	8
15	6	14
16	2	16
17	5	21

$\frac{n+1}{2} = \frac{21+1}{2} = 11$, portanto a mediana está na 11ª posição.

A 11ª posição é ocupada pelo valor **15**, então:

Md = 15

b) n é par

Considere a distribuição:

x_i	f_i	Fi
2	2	2
4	5	7
5	7	14

$\frac{n}{2} = \frac{14}{2} = 7$, portanto o valor mediano está entre a 7ª e 8ª posição.

A 7ª posição é ocupada pelo valor **4** e a 8ª posição pelo valor **5**, então:

$$\mathbf{Md} = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$$

3. Dados agrupados com intervalos de classe

Devemos, inicialmente, determinar a classe na qual se encontra a mediana – classe mediana. O procedimento é análogo ao utilizado nos dados agrupados sem intervalos. Determinada a classe mediana aplicamos a seguinte fórmula:

$$\text{Md} = L_{Md} + \left(\frac{\frac{n}{2} - Fac_{ant}}{f_{Md}} \right) .h$$

na qual:

- L_{Md} é o limite inferior da classe mediana;
- Fac_{ant} é a freqüência acumulada da classe anterior à classe mediana;
- h é a amplitude do intervalo da classe mediana;
- f_{Md} é a freqüência simples da classe mediana.

<u>Exemplos</u>:

1. Considere a distribuição:

i	classe	f_i	Fi
1	[180, 200[	4	4
2	[200, 220[	18	22
3	[220, 240[	10	32
4	[240, 260[	5	37
5	[260, 280[	3	40

Li = 200; F_{ant} = 4; h= 20 e f_{Md} = 18

$$Md = 200 + 200 + \left(\frac{\frac{40}{2} - 40}{18} \right).20 = 200 + 17{,}78 \Rightarrow \mathbf{Md} = 217{,}78$$

2. Considerando a distribuição:

i	classe	f_i	Fi
1	[150, 154[	4	4
2	[154, 158[	9	13
3	[158, 162[	11	24
4	[162, 166[	8	32
5	[166, 170[	5	37
6	[170, 174[	3	40

classe mediana →

Li = 158; F_{ant} = 13; h = 4 e f_{Md} = 11

$$Md = 158 + \left(\frac{\frac{40}{2} - 13}{11} \right).4 = 158 + 2{,}54 \Rightarrow \mathbf{Md} = 160{,}54$$

Observação: Caso a freqüência acumulada seja exatamente igual a $\frac{n}{2}$, a **mediana** será o **limite superior** da classe correspondente.

Utilização das Medidas de Tendência Central

Na maioria das situações, não necessitamos calcular as três medidas de tendência central.

Normalmente precisamos de apenas uma das medidas para caracterizar o centro da série.

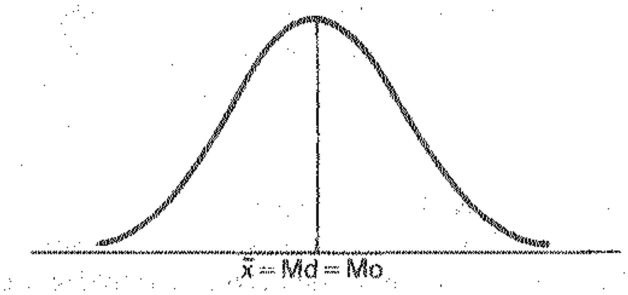
Surge, então, a questão: qual medida deve ser utilizada?

A medida ideal em cada caso é aquela que melhor representa a maioria dos dados da série.

Quando todos os dados de uma série estatística são iguais, a média, a mediana e a moda coincidirão com este valor e, portanto qualquer uma delas representará bem a série. No entanto, este caso dificilmente ocorrerá na prática.

Na maioria das vezes, teremos valores diferenciados para a série e conseqüentemente a medida irá representar bem, apenas os dados da série que se situam próximos a este valor. Os dados muitos afastados em relação ao valor da medida não serão bem representados por ela.

Desta forma, se uma série apresenta forte concentração de dados em sua área central, a média, a mediana e a moda ficam também situadas em sua área central representando bem a série como na figura abaixo (ver fig. 4.3.). Como a mais conhecida é a média, optamos por esta medida de tendência central. Concluindo, devemos optar pela média, quando houver forte concentração de dados na área central da série.



Se uma série apresenta forte concentração de dados em seu início, a mediana e a moda estarão posicionadas mais no início da série, representando bem esta concentração. A média que é fortemente afetada por alguns valores posicionados no final da série se deslocará para a direita desta concentração não a representando bem.

Como a mais conhecida entre mediana e moda é a mediana, esta será a medida indicada neste caso.

A mesma situação ocorre se a série apresenta forte concentração de dados em seu final.

Concluindo, devemos optar pela mediana, quando houver forte concentração de dados no início ou no final da série.

A moda deve ser a opção como medida de tendência central apenas em séries que apresentam um elemento típico, isto é, um valor cuja freqüência é muito superior à freqüência dos outros elementos da série.

Exercícios

1. Calcule a moda, a mediana e a média das seguintes séries:

a) 46, 44, 49, 45, 44, 48, 50, 42, 47

b) 1, 1, 3, 2, 3, 5, 4, 5, 3, 3, 2, 2, 1, 1

2. Calcule a mediana e a média do conjunto de dados apresentados pela seguinte distribuição de freqüências:

x_i	8	12	16	20
f_i	7	16	20	5

3. Em uma casa de repouso, as pessoas internadas têm as seguintes idades:

67 68 74 67 68 84 75 80 75 84

75 73 67 74 78 77 75 80 74 77

85 85 68 74 72 73 71 73 71 85
68 84 80 77 78 75 71 72 73 84

Calcule a mediana, a moda e a média dessa distribuição.

4. Considere a tabela, que representa a distribuição das áreas cultivadas, em hectares, de uma determinada região.
Dados: $\mathbf{x_i}$: área em hectares, $\mathbf{f_i}$: número de áreas cultivadas.

$\mathbf{x_i}$	$\mathbf{f_i}$
[0; 2[	30
[2; 4[	35
[4; 6[	60
[6; 8[	35
[8; 10[	15
[10; 12[	8
[12; 14[	2

Determine:
a) a classe modal e a moda da distribuição
b) a classe mediana e a mediana da distribuição
c) a média

5. A tabela abaixo indica os Custos, de uma determinada empresa, com encargos salariais:

Custos	$\mathbf{f_i}$
[450; 550[	8
[550; 650[	10
[650; 750[	11
[760; 850[	16
[850; 950[	13
[950; 1.050[	5
[1.050; 1.150]	1

Determine:
a) a ordem da classe modal;
b) a moda da distribuição;
c) a classe mediana;
d) a mediana da distribuição;
e) construa o histograma e o polígono de freqüências da distribuição.
f) a média salarial.

6. A tabela seguinte fornece o número de erros gráficos por página de certo livro.

número de erros	0	1	2	3	4
número de páginas	84	25	8	2	1

Calcular:
a) o número médio de erros por página
b) o número mediano
c) qual é a moda da distribuição?

7. Numa pesquisa entre 250 famílias de certa cidade constataram-se os seguintes dados:

nº de filhos	0	1	2	3	4	5	6	7
nº de famílias	45	52	48	55	30	10	8	2

Para a distribuição do número de filhos, calcular a média, a mediana e a moda.

8. Se os dados do problema anterior estivessem computados como segue:

nº de filhos	0	1	2	3	4	mais do que 4
nº de famílias	45	52	48	55	30	20

qual das três medidas nós teríamos dificuldades para calcular?

9. Os dados seguintes referem-se ao tempo de vida (durabilidade) de 150 lâmpadas elétricas de certa fabricação, em centenas de horas.

Duração	nº de lâmpadas
0 ⊢ 4	4
4 ⊢ 8	12
8 ⊢ 12	40
12 ⊢ 16	41
16 ⊢ 20	27
20 ⊢ 24	13
24 ⊢ 28	9
28 ⊢ 32	4

a) Qual é a moda?
b) Calcular a vida média das lâmpadas.
c) Qual é a mediana?
d) Qual é a porcentagem do número de lâmpadas que duraram mais do que a média?

10. A média dos salários dos funcionários de uma determinada empresa é 5 salários mínimos (5 SM), enquanto que a mediana é 4 SM. Sorteando-se ao acaso um dos funcionários, o que é mais provável: que ele ganhe mais ou que ele ganhe menos do que a média dos salários?

11. Uma prova foi aplicada a três classes, de 40, 48 e 46 alunos, e as médias de cada classe foram 6,0, 6,6 e 5,8, respectivamente. Qual é a média para os 134 alunos que fizeram a prova?

12. Quando a medida de posição deve ser o valor mais típico da distribuição utilizamos:
a) a média **b)** a mediana **c)** a moda **d)** a moda ou a média

13. Quando desejamos o ponto médio exato de uma distribuição de freqüência, basta calcular:
a) a média **b)** a moda **c)** a mediana **d)** as três

14. Considere uma série estatística com 2351 elementos. A posição da mediana é representada pelo:

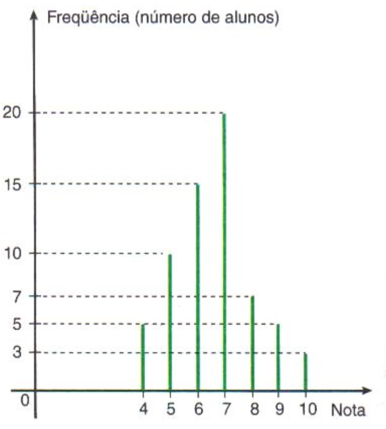
a) 1175º elemento
b) 1176º elemento
c) ponto médio entre o 1175º e o 1176º elemento
d) 1174º elemento

15. Um professor, após verificar que toda a classe obteve nota baixa, eliminou as questões que não foram respondidas pelos alunos. Com isso, as notas de todos os alunos foram aumentadas de 3 pontos. Então:
a) a média aritmética ficou alterada, assim como a mediana.
b) apenas a média aritmética ficou alterada.
c) apenas a mediana ficou alterada.
d) não houve alteração nem na média nem na mediana.
e) nada podemos afirmar sem conhecer o número total de alunos.

16. Calcule o número médio, mediano e modal de acidentes por dia em uma determinada esquina.

Números de acidentes por dia (x_i)	**Números de dias (f_i)**
0	30
1	5
2	3
3	1
4	1
Total	40

17. O gráfico abaixo mostra a distribuição de freqüências das notas obtidas pelos alunos, da 2ª série do ensino médio, numa prova de Geografia. Determine:
a) a mediana dessa distribuição;
b) a moda dessa distribuição
c) a média das notas.



18. As notas de um candidato em seis provas de um concurso foram:
8,4 ; 9,1 ; 7,2 ; 6,8 ; 8,7 ; 7,2

Determine:
a) a nota média;
b) a nota mediana;
c) a nota modal.

19. Os salários-hora de cinco funcionários de uma companhia são:
R$ 75 ; R$ 90 ; R$ 83 ; R$ 142 ; R$ 88

a) qual o salário médio?
b) qual o salário mediano?

20. Considere as notas obtidas pelos alunos de uma classe em uma determinada prova:

Notas	Nº de alunos
2	1
3	3
4	6
5	10
6	13
7	8
8	5
9	3
10	1

Calcule:
a) a nota média;
b) a nota mediana;
c) a nota modal.

21. A partir de uma amostra de 70 pessoas obteve-se a tabela a seguir com as estaturas dos entrevistados:

Estaturas (cm)	frequência
150 ⊢ 158	5
158 ⊢ 166	12
166 ⊢ 174	18
174 ⊢ 182	27
182 ⊢ 190	8

Determine, para essa distribuição:
a) a média;
b) a mediana;
c) a moda;
d) o primeiro quartil;
e) o terceiro quartil;
f) o primeiro decil;
g) o 23º percentil;
h) D_9

22. Os pesos de 40 pessoas que estavam fazendo um tratamento de emagrecimento numa determinada clínica de São Paulo foram agrupados na tabela a seguir:

Pesos (kg)	f_i
145 ⊢ 151	10
151 ⊢ 157	9
157 ⊢ 163	8

163	⊢ 169	6
169	⊢ 175	3
175	⊢ 181	3
181	⊢ 187	1

Determine, para essa distribuição:
a) a média;
b) a mediana;
c) a moda;
d) o primeiro quartil;
e) o terceiro quartil.

23. Considerando a distribuição abaixo, determine:

x_i	f_i
3	4
4	8
5	11
6	10
7	8
8	3

a) a média;
b) a mediana;
c) a moda.

Respostas

18) a) 7,9 b) 7,8 c) 7,2
19) a) R$ 96 b) R$ 88
20) a) 5,9 b) 6 c) 6
21) a) 172,4 b) 174 c) 176,6 d) 166,2 e) 179,2 f) 159,3 g) 165,4 h) 183
22) a) 159,4 b) 157,8 c) 150,5 d) 151 e) 166
23) a) 5,4 b) 5 c) 5