II. Programação Linear

Referências
1. Ackoff, R.L., Sasieni, M.N., Pesquisa Operacional, EDUSP, 1971.
2. Hillier, F.S., Lieberman, G.J., Operations Research, Holden Day, 2ª Ed, 1974.

1. Introdução

Programação Linear envolve o planejamento de atividades visando a obtenção de um resultado ótimo. Na formulação do modelo matemático para descrição do problema de interesse apenas estão envolvidas funções lineares.

Exemplo 1. Uma pequena fábrica de peças de automóveis produz dois tipos de peças. A fábrica compra unidades fundidas que são torneadas, furadas e retificadas. A capacidade de produção da fábrica é descrita na tabela seguinte

	Peça A	Peça B
torneamento	25/h	40/h
furação	28/h	35/h
retificação	35/h	25/h

As peças do tipo A custam $2 cada, as peças do tipo B custam $3 cada. O preço de venda é $5 para peças do tipo A e $6 para peças do tipo B. As máquinas têm custos operacionais de $20 (torneamento), $14 (furação) e $17,50 (retificação) por hora. Supondo que qualquer combinação dos tipos A e B possa ser posta à venda, qual o plano de produção que maximiza o lucro?

Com os dados acima é possível calcular o custo e o lucro por peça para cada tipo de produto.

	Peça A	Peça B
Torneamento	$\frac{20}{25} = 0,8$	$\frac{20}{40} = 0,5$
Furação	$\frac{14}{28} = 0,5$	$\frac{14}{35} = 0,4$
Retificação	$\frac{17,5}{35} = 0,5$	$\frac{17,5}{25} = 0,7$
Compra	2,0	3,0
Custo total	3,8	4,6
Preço de venda	5,0	6,0
Lucro	1,2	1,4

Os custos por peça são calculados dividindo o custo de operação em uma hora pelo número de peças produzidas em uma hora.

Se produzirmos x peças do tipo A em média por hora e y peças do tipo B nosso lucro médio será:

$$Z = 1,2x + 1,4y \qquad (1)$$

Não faz sentido a produção de um número negativo de peças, assim

$$x \geq 0 \ , \ y \geq 0 \qquad (2)$$

Gostaríamos de maximizar Z (chamada <u>função objetivo</u>) encontrando valores para x e y que devem ser positivos e compatíveis com a capacidade de produção das máquinas. Dessa forma temos ainda:

$$\text{Torneamento} \quad \frac{x}{25} + \frac{y}{40} \leq 1 \qquad (3)$$

Na forma padrão teremos o seguinte problema a resolver:

$$\text{Maximizar } Z = 1{,}2x + 1{,}4y$$

sujeita às seguintes restrições

parâmetros

$$\left.\begin{aligned} 40x + 25y &\leq 1000 \\ 35x + 28y &\leq 980 \\ 25x + 35y &\leq 875 \end{aligned}\right\} \text{ vínculos funcionais}$$

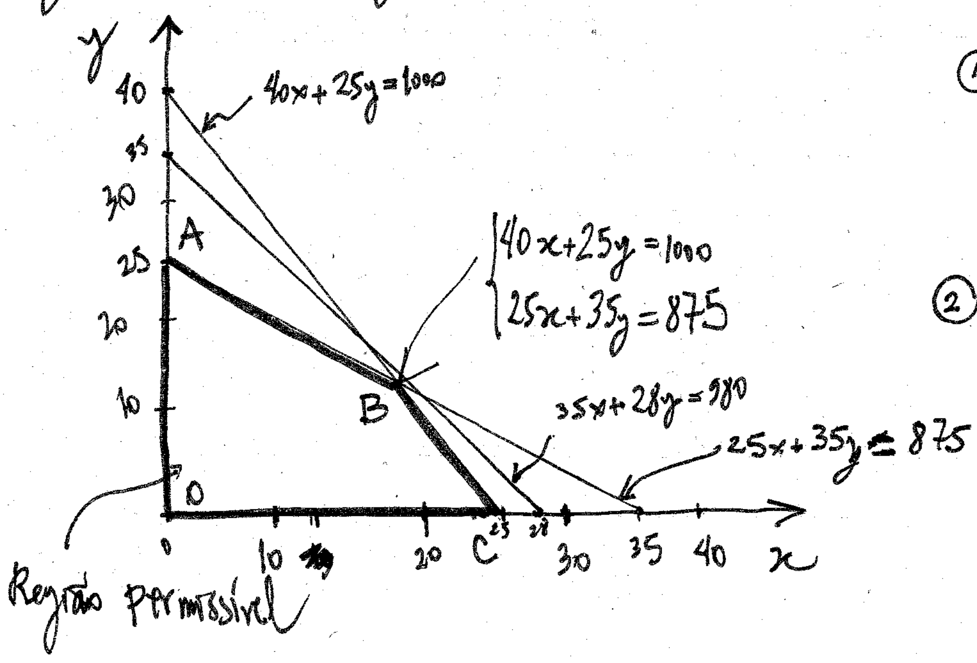
e

$$x \geq 0 \ , \quad y \geq 0 \ \Big\} \text{ vínculos de não-negatividade}$$

variáveis de decisão

2. Solução Gráfica

Exemplo 2. O problema da programação linear consiste em encontrar valores para a variáveis de decisão que respeitem os vínculos do modelo e maximizem a função objetivo Z. No caso do exemplo 1 que é bidimensional é possível representar graficamente a região de valores permissíveis para x e y.

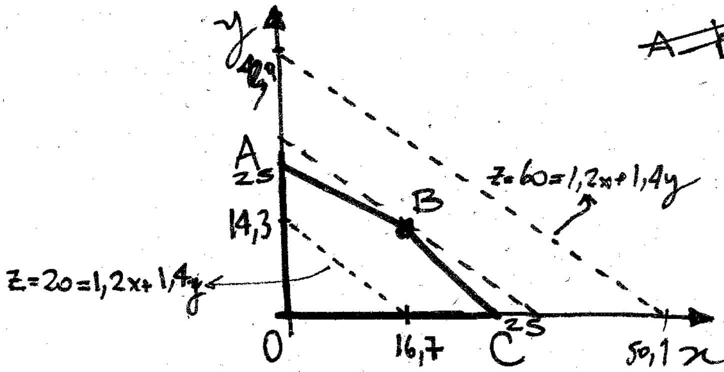


① As soluções se encontram no quadrante positivo do gráfico.

② A região permissível é identificada pela intersecção das regiões delimitadas pelos vínculos funcionais

32

· A solução será sempre um dos vértices do polígono definindo a região permissível OABC.



~~A reta~~ A função objetivo define para cada valor de lucro uma reta com valores variados de x e y.

Por exemplo, fazendo $Z=20$ temos a reta $1,2x+1,4y=20$ representada acima. Fazendo $Z=60$ temos outra reta, paralela a primeira porém cruzando os eixos em valores três vezes maiores.

Obs1: Note que a função $y = c + \frac{b}{a}x$ tem derivada que independe de c dada por $y' = \frac{b}{a}$.

Os valores (x,y) que maximizam Z são, portanto, definidos pela reta mais alta que intersecta a região permissível OABC. Assim, a solução é dada pelo vértice B que é solução para o seguinte sistema linear:

$$(*)\begin{cases} 40x + 25y = 1000 \\ 25x + 35y = 875 \end{cases}$$

Obs2: A forma mais rápida de solução de um sistema linear como (*) é utilização da Regra de Cramer:

$$x^* = \frac{\begin{vmatrix} 1000 & 25 \\ 875 & 35 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 25 \\ 25 & 35 \end{vmatrix}} = \frac{13125}{775} = 16,9$$

$$y^* = \frac{\begin{vmatrix} 40 & 1000 \\ 25 & 875 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 40 & 25 \\ 25 & 35 \end{vmatrix}} = \frac{10000}{775} = 12,9$$

A produção deve então ser programada de forma que as taxa de produção média por hora estejam na proporção de $x^* = 16,9$ peças A para $y^* = 12,9$ peças B. O lucro médio máximo, obtido com essa programação, é $Z = 1,2x^* + 1,4y^* = 38,34$

Exemplo 3. A empresa Wyndor Glass produz janelas e portas de vidro. A empresa tem 3 plantas de produção: esquadrias de alumínio são produzidas na Planta 1, esquadrias de madeira são produzidas na Planta 2 e a Planta 3 é utilizada na produção de vidro e na montagem dos produtos.

Queda nos lucros [redacted] levou a ~~g~~ alta gerência da empresa a modificar sua linha de produtos. Produtos gerando prejuízos serão descontinuados e isto liberará capacidade de produção para um ou dois novos produtos potenciais. Há no momento dois produtos novos em demanda. O departamento de Marketing concluiu que a companhia poderia vender tanto destes produtos novos quanto puder produzir. No entanto, como os dois produtos competirão pela capacidade de produção da Planta 3, não é claro qual seria a combinação de produção mais lucrativa.

(34)

A informação essencial para resolução do problema é:

1. A porcentagem da capacidade de cada planta que será disponibilizada para os produtos novos;
2. As porcentagens necessárias para produção de cada unidade do produto por minuto;
3. O lucro obtido na produção de cada unidade.

Planta	Capacidade utilizada por unidade 1	2	Capacidade disponível para novos produtos
1	1	0	4
2	0	2	12
3	3	2	18
Lucro por unidade	\$3	\$5	

Na forma padrão teremos:

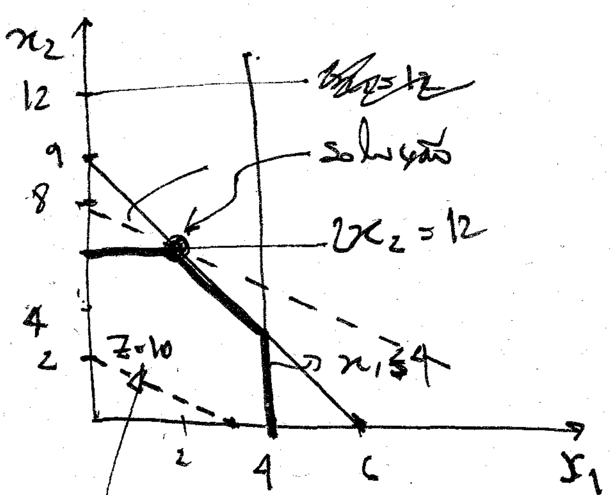
$$\text{Maximizar } Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeita a

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

e

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$



A solução é claramente o vértice definido pelo ~~sistema~~ sistema linear

$$\begin{cases} 2x_2 = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 = 18 \end{cases}$$

cuja solução pode ser

obtida por substituição simples ou pela regra de Cramer.

Por substituição:

$$x_2 = \frac{12}{2} = 6$$

$$3x_1 + 2 \times 6 = 18 \therefore x_1 = 2$$

Pela Regra de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 2 \\ 18 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-6} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 12 \\ 3 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-36}{-6} = 6$$

A programação ótima da produção aponta para 6 unidades do produto 2 para cada 2 do produto 1 gerando lucro médio de

$$Z = 3 \times 2 + 5 \times 6 = \$36/\text{min}.$$

3. Modelo genérico de Programação Linear

Um modelo genérico para programação linear envolve a alocação de recursos escassos na produção de uma variedade de produtos por intermédio de atividades em competição. Assim imaginam-se ~~[illegible]~~ M tipos de recursos em quantidades $b_1, \ldots b_M$. A partir destes recursos produzem-se N diferentes tipos de produto em níveis de produção $x_1, \ldots, x_N$.

36

Para cada unidade do produto j consome-se a_{ij} unidades do recurso i perfazendo uma matriz resumida na tabela abaixo:

Recursos \ atividade	Utilização da matriz de produção/unidade				Quantidade de recursos disponíveis
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1N}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2N}	b_2
⋮			⋮		⋮
M	a_{M1}	a_{M2}	...	a_{MN}	b_M
lucro/unidade	c_1	c_2	...	c_N	
nível de prod.	x_1	x_2	...	x_N	

O problema consiste em:

$$\text{Maximizar } Z = c_1x_1 + \cdots + c_Nx_N$$

sujeito às restrições

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N \leq b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N \leq b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{M1}x_1 + a_{M2}x_2 + \cdots + a_{MN}x_N \leq b_M$$

e

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots\ x_N \geq 0$$

É possível representar o mesmo problema utilizando notação vetorial compacta:

$$\max Z = \vec{c} \cdot \vec{x}$$

sujeito à

$$\underline{\underline{A}}\vec{x} \leq \vec{b}$$

e

$$\vec{x} \geq 0$$

Também são considerados problemas de programação linear modelos com:

1. Minimização de Z;
2. vínculos do tipo $a_{i1}x_1 + \dots a_{iN}x_N \geq b_i$ para algum i
3. vínculos do tipo $a_{i1}x_1 + \dots + a_{iN}x_N = b_i$ para algum i
4. alguns x_j sem restrições de sinal.

Exemplo 4 Kibbutz é um tipo de fazenda comunitária implementada em Israel. A produtividade de cada Kibbutz é limitada pela quantidade de água alocada para irrigação e pela quantidade de terras irrigáveis. Suponhamos que para três Kibbutz, nos quais estamos interessados, tenhamos:

Kibbutz	Área útil (acres)	Quantidade de água (acre pé)
1	400	600
2	600	800
3	300	375

Em cada uma das fazendas é possível plantar três diferentes tipos de ~~lavoura~~ plantações. O Ministério da Agricultura, adicionalmente, fixa a área máxima que deve no conjunto ser dedicada a cada tipo de plantação.

Plantação	Cota máxima (acres)	Consumo de água (acre pé/acre)	Lucro líquido C$ /acre)
1	600	3	400
2	500	2	300
3	325	1	100

Além disso os três kibbutzim estabeleceram que plantarão ~~os três tipos de lavoura nas mesmas proporções~~ a mesma fração de sua área útil.

38

O objetivo geral é escolher uma combinação de plantações que maximize o retorno líquido do conjunto de Kibbutizim.

As variáveis de decisão podem ser organizadas em uma matriz:

Plantação \ Kibbutz (Alocação)	1	2	3
1	x_1	x_2	x_3
2	x_4	x_5	x_6
3	x_7	x_8	x_9

Obs: Note que essa matriz é <u>diferente</u> em significado da matriz da pág 36.

aqui x_j é dado em número de acres.

~~A função objetivo resulta em~~ O problema consiste em:

$$\text{Maximizar } Z = 400(x_1+x_2+x_3) + 300(x_4+x_5+x_6) + 100(x_7+x_8+x_9)$$

sujeito aos seguintes vínculos:

1. Área de plantio

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + x_7 \leq 400 & \text{Kibbutz 1} \\ x_2 + x_5 + x_8 \leq 600 & \text{Kibbutz 2} \\ x_3 + x_6 + x_9 \leq 300 & \text{Kibbutz 3} \end{cases}$$

2. Água disponível para irrigação

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_4 + x_7 \leq 600 \\ 3x_2 + 2x_5 + x_8 \leq 800 \\ 3x_3 + 2x_6 + x_9 \leq 375 \end{cases}$$

Aqui multiplicamos o número de acres pelo consumo de água por acre para cada tipo de plantio.

3. Cotas máxima de plantio total

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 600 \\ x_4 + x_5 + x_6 \leq 500 \\ x_7 + x_8 + x_9 \leq 325 \end{cases}$$

4. Acordo entre Kibbutzim

$$\frac{x_1 + x_4 + x_7}{400} = \frac{x_2 + x_5 + x_8}{600}$$

$$\frac{x_2 + x_5 + x_8}{600} = \frac{x_3 + x_6 + x_9}{300}$$

$$\frac{x_3 + x_6 + x_9}{300} = \frac{x_1 + x_4 + x_7}{400}$$

Aqui igualamos a fração ~~plant~~ cultivada em cada um dos Kibbutzim. Estes vínculos podem ser reescritos como:

$$\begin{cases} 3(x_1 + x_4 + x_7) - 2(x_2 + x_5 + x_8) = 0 \\ x_2 + x_5 + x_8 - 2(x_3 + x_6 + x_9) = 0 \\ 4(x_3 + x_6 + x_9) - 3(x_1 + x_4 + x_7) = 0 \end{cases}$$

Note que este problema de programação linear ~~tem~~ é definido em um espaço de variáveis de decisão com 9 dimensões e não pode, portanto, ser resolvido, como os exemplos anteriores, pelo método gráfico. O método simplex, que veremos a seguir, resolve este problema resultando em:

Plantação \ Kibbutz	Alocação 1	2	3
1	133,3	100	25
2	100	250	150
3	0	0	0

Obs: Como não há vínculos ~~em~~ estabelecendo valores mínimos para área cultivada com o tipo 3, a decisão ótima estabelece que nenhum Kibbutz com ~~planta~~ cultivar a lavoura do tipo 3.

Exemplo 5. Controle de Poluição do Ar. Uma siderúrgica precisa reduzir sua emissão de poluentes conforme as seguintes metas fixadas pela alta gerência:

Poluente	Meta de redução anual em Milhões de libras
particulados	60
óxidos sulfúricos	150
hidrocarbonos	125

O pessoal de engenharia identificou três formas de redução de emissões com efeitos diferentes nos dois tipos de fornalhas utilizadas segundo a tabela a seguir que lista seu impacto máximo:

Poluente	modificações nas chaminés		Filtros		Combustíveis melhores	
particulados	12	9	25	20	17	13
óxidos	35	42	18	31	56	49
hidrocarbonos	37	53	28	24	29	20
Fornalha	F1	F2	F1	F2	F1	F2

Na tabela acima é aparente que nenhuma das formas de redução pode atingir sozinha as metas desejadas. Por outro lado, a combinação de todas as formas levaria a uma redução excessiva com custos proibitivos.

É necessário, portanto, combinar as diversas técnicas de redução de forma a cumprir as metas com o menor custo possível.

Os custos estimados anuais para cada uma das técnicas, incluindo o custo de instalação, custo de operação e qualquer eventual redução de produtividade são listados a seguir:

Método	Custo F1	Custo F2
Chaminés mais altas	8	10
Filtros	7	6
Combustíveis melhores	11	9

Determinou-se também que cada uma das técnicas pode ser implementada de forma fracionária, sendo que tanto o impacto quanto o custo mantêm as mesmas proporções (por exemplo, filtros podem ser empregados em apenas ~~0,5~~ 50% de sua capacidade custando a metade e produzindo apenas metade de seu potencial de redução de emissões).

O problema de programação linear será, portanto:

Minimizar $Z = 8x_1 + 10x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 11x_5 + 9x_6$,
onde as variáveis de decisão representam a escala de operação de cada uma das técnicas de redução disponíveis:

Método	Custo F1	Custo F2
Chaminés	x_1	x_2
Filtros	x_3	x_4
Combustíveis	x_5	x_6

A minimização está sujeita aos seguintes vínculos:

1. Metas de redução de emissão

$$\begin{cases} 12x_1 + 9x_2 + 25x_3 + 20x_4 + 17x_5 + 13x_6 \geq 60 & \text{particulados} \\ 35x_1 + 42x_2 + 18x_3 + 31x_4 + 56x_5 + 49x_6 \geq 150 & \text{óxidos} \\ 37x_1 + 53x_2 + 28x_3 + 24x_4 + 29x_5 + 20x_6 \geq 125 & \text{hidrocarbonos} \end{cases}$$

2. ~~Fecas~~ Limite da tecnologia. Impacto máximo de cada técnica é obtido com operação em escala total, ou seja, com $x_j = 1$ para todos os j

$$x_j \leq 1 \quad \text{para } j = 1, \ldots, 6$$

3. Não-negatividade das escalas de operação.

$$x_j \geq 0 \quad \text{para } j = 1, \ldots, 6$$

Novamente temos um problema com muitas dimensões que não é passível de solução pelo método gráfico. Utilizando o método simplex obtemos:

Método	F_1	F_2
chaminés	1	0,623
filtros	0,343	1
combustível	0,048	1

Tanto os custos incorridos quanto as reduções de emissões obtidas são resultado de estimativas que podem conter pequenos erros. Antes de implementar a programação sugerida é necessário testar o efeito de pequenas diferenças nos parâmetros sobre a alocação ótima. A este procedimento de verificação dá-se o nome de análise de sensibilidade, que será objeto de estudo após estudarmos o método simplex para solução genérica de problemas de programação linear.

Exemplo 6 Uma empresa de reciclagem possui um centro de coleta que trabalha com quatro tipos de resíduos sólidos, tratando-os e transformando-os em produtos vendáveis. A empresa produz três níveis de materiais dependendo da mistura de recicláveis empregada. Embora haja alguma flexibilidade na mistura necessária para cada nível, a qualidade dos produtos finais fixa quantidades máximas e mínimas. A tabela seguinte mostra os custos de envolvidos e o preço por unidade de peso de cada nível de material produzido.

Nível	Especificação	Custo da Mistura/Kg	Preço de venda/Kg
A	Material 1: não mais que 30% do total Material 2: não menos que 40% do total Material 3: não mais do que 50% do total Material 4: exatamente 20% do total	3,00	8,50
B	Material 1: não mais que 50% do total Material 2: não menos do que 10% do total Material 4: exatamente 10% do total	2,50	7,00
C	Material 1: não mais que 70% do total	2,00	5,50

A tabela seguinte representa a quantidade de material disponível semanalmente e os custos de tratamento para cada tipo e restrições adicionais.

Material	Kg/semana	Custo de tratamento/Kg	Restrições
1	3000	3,00	1. Para cada material, ao menos metade tem que ser coletado e tratado.
2	2000	6,00	2. Devem ser usados \$30.000 por semana no tratamento dos materiais
3	4000	4,00	
4	1000	5,00	

(44)

Seja x_{ij} = número de Kg do material j alocado para o produto de nível i por semana. ($j=1,2,3,4$) ($i=A,B,C$). Assim

$x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}$ = número de Kgs do produto nível i produzido por semana

$x_{Aj} + x_{Bj} + x_{Cj}$ = número de Kgs do material j utilizados em uma semana.

$$\frac{x_{ij}}{x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}} = \text{proporção do material } j \text{ no produto } i$$

O problema consiste da maximização do lucro através da scolha de alocação apropriada dos materiais $j=1,2,3,4$ para produção de A, B e C. Assim temos:

$$\text{Maximizar } Z = 5{,}5(x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}) + 4{,}5(x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} + x_{B4}) + 3{,}5(x_{C1} + x_{C2} + x_{C3} + x_{C4})$$

sujeita aos seguintes vínculos funcionais

1. Especificações de mistura:

$$\frac{x_{A1}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \leqslant 0{,}3 \quad \text{(nível A, material 1)}$$

$$\frac{x_{A2}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \geqslant 0{,}4 \quad \text{(nível A, material 2)}$$

$$\frac{x_{A3}}{x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} + x_{A4}} \leqslant 0{,}5 \quad \text{(nível A, material 3)}$$

$$\frac{x_{A4}}{x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}+x_{A4}} = 0{,}2 \quad (\text{nível A, material 4})$$

$$\frac{x_{B1}}{x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}} \leq 0{,}5 \quad (\text{nível B, material 1})$$

$$\frac{x_{B2}}{x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}} \geq 0{,}1 \quad (\text{nível B, material 2})$$

$$\frac{x_{B4}}{x_{B1}+x_{B2}+x_{B3}+x_{B4}} = 0{,}1 \quad (\text{nível B, material 4})$$

$$\frac{x_{C1}}{x_{C1}+x_{C2}+x_{C3}+x_{C4}} \leq 0{,}7 \quad (\text{nível C, material 1})$$

Cada uma destas especificações pode ser reescrita como:

$$0{,}7x_{A1} - 0{,}3x_{A2} - 0{,}3x_{A3} - 0{,}3x_{A4} \leq 0$$
$$-0{,}4x_{A1} + 0{,}6x_{A2} - 0{,}4x_{A3} - 0{,}4x_{A4} \geq 0$$
$$-0{,}5x_{A1} - 0{,}5x_{A2} + 0{,}5x_{A3} - 0{,}5x_{A4} \leq 0$$
$$-0{,}2x_{A1} - 0{,}2x_{A2} - 0{,}2x_{A3} + 0{,}8x_{A4} = 0$$

$$0{,}5x_{B1} - 0{,}5x_{B2} - 0{,}5x_{B3} - 0{,}5x_{B4} \leq 0$$
$$-0{,}1x_{B1} + 0{,}9x_{B2} - 0{,}1x_{B3} - 0{,}1x_{B4} \geq 0$$
$$-0{,}1x_{B1} - 0{,}1x_{B2} - 0{,}1x_{B3} + 0{,}9x_{B4} = 0$$

$$0{,}3x_{C1} - 0{,}7x_{C2} - 0{,}7x_{C3} - 0{,}7x_{C4} \leq 0$$

2. Disponibilidade de materiais

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 3000 \quad \text{(material 1)}$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 2000 \quad \text{(material 2)}$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 4000 \quad \text{(material 3)}$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \leq 1000 \quad \text{(material 4)}$$

3. Restrição da quantidade tratadas (50%)

$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \geq 1500$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \geq 1000$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \geq 2000$$
$$x_{A4} + x_{B4} + x_{C4} \geq 500$$

4. Restrição do custo de tratamento

$$3(x_{A1} + x_{B1} + x_{C1}) + 6(x_{A2} + x_{B2} + x_{C2}) + 4(x_{A3} + x_{B3} + x_{C3}) + 5(x_{A4} + x_{B4} + x_{C4}) = 30000$$

5. Não-negatividade

$x_{A1} \geq 0$ $\quad x_{A2} \geq 0$ $\quad x_{A3} \geq 0$ $\quad x_{A4} \geq 0$
$x_{B1} \geq 0$ $\quad x_{B2} \geq 0$ $\quad x_{B3} \geq 0$ $\quad x_{B4} \geq 0$
$x_{C1} \geq 0$ $\quad x_{C2} \geq 0$ $\quad x_{C3} \geq 0$ $\quad x_{C4} \geq 0$

A solução pode ser obtida rodando-se o glpsol:

	Material (Kg/semana)				
Nível	1	2	3	4	Kg Produzidos/semana
A	412,3	859,6	447,4	429,8	2149
B	2587,7	517,5	1552,6	517,5	5175
C	0	0	0	0	0
Total	3000	1377	2000	947	

4. Simplex: Interpretação Geométrica

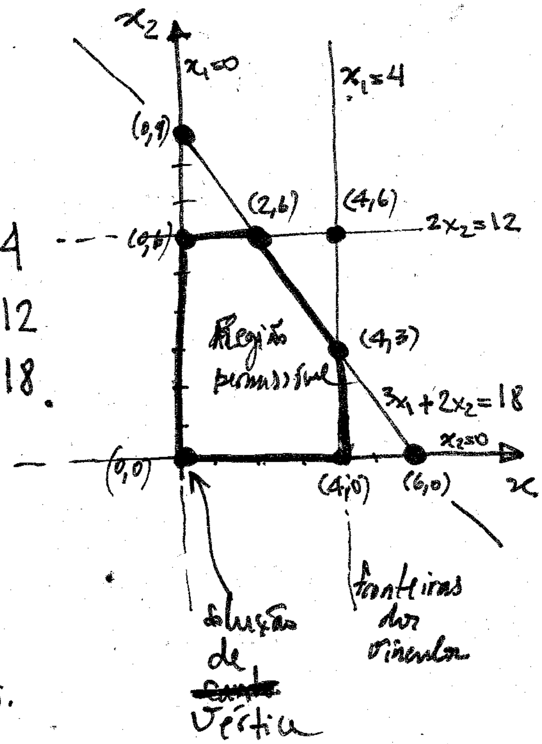
Retomamos o exemplo 3:

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeita a

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18. \end{aligned}$$

e $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

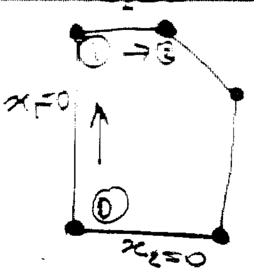


Def: Soluções adjacentes - Duas soluções são adjacentes se tiverem $n-1$ vínculos em comum. n é o número de variáveis de decisão.

No exemplo 3 $n=2$ e duas soluções de canto são adjacentes se tiverem um vínculo em comum, dessa forma:

Solução de canto	Soluções adjacentes
(0, 0)	(0, 6) e (4, 0)
(0, 6)	(2, 6) e (0, 0)
(2, 6)	(4, 3) e (0, 6)
(4, 3)	(4, 0) e (2, 6)
(4, 0)	(0, 0) e (4, 3)

Def: Teste de otimalidade - Consideremos qualquer problema de programação linear que possua ao menos uma solução ótima. Se uma solução de canto não tem nenhuma solução adjacente melhor (segundo a função objetivo Z) então ela necessariamente é uma solução ótima.



Exemplo 7. Resolvendo Exemplo 3 utilizando simplex.

- Inicialização: Escolha (0,0) como solução inicial.

* Teste de otimalidade: $Z(0,0)=0$. Adjacentes $Z(0,6)=30$ $Z(4,0)=12$. (0,0) não é ótimo.

Iteração 1: Mova-se para uma solução adjacente superior seguindo os seguintes passos:

1. Considerando as duas arestas da região permissível que emanam de (0,0) mova-se pelo eixo x_2, por onde Z aumenta mais rapidamente.
2. Pare ao encontrar a primeira fronteira: $2x_2=12$.
3. Encontre o ponto de intersecção entre a fronteira pela qual se moveu ($x_1=0$) e a nova fronteira ($2x_2=12$). Este ponto é (0,6).

* Teste de otimalidade: $Z(0,6)=30$. Adjacentes $Z(0,0)=0$, $Z(2,6)=36$.

Iteração 2: Mova-se na direção da melhor solução adjacente através de uma das arestas emanando de (0,6) utilizando os seguintes passos:

1. Escolha a aresta que apresente o crescimento mais rápido de Z. Neste caso rume para a direita.
2. Pare ao encontrar o primeiro novo vínculo. Neste caso $3x_1+2x_2=12$.
3. Encontre o ponto de intersecção entre a aresta atual $2x_2=12$ e a nova aresta descrita pelo vínculo $3x_1+2x_2=12$. Neste caso (2,6).

* Teste de otimalidade: $Z(2,6)=36$. Adjacentes menores.

5. Forma Padrão para Problemas de Programação Linear

O algoritmo Simplex faz uso intensivo de soluções numéricas para sistemas lineares de equações. Para isso é necessário primeiro converter sistemas de inequações em sistema de equações o que pode ser feito através da introdução de <u>variáveis residuais</u>. Por exemplo, imaginemos que nosso problema de P.L. envolva uma variável com os seguintes vínculos:

$$* \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant 4$$

De forma equivalente podemos introduzir uma variável residual $x_2 \geqslant 0$ e escrever:

$$** \qquad \begin{gathered} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \end{gathered}$$

Como tanto x_1 quanto x_2 são positivos temos que necessariamente $x_1 \leqslant 4$.

<u>Exemplo 8</u>: Retornando novamente ao problema do Exemplo 3 temos o seguinte sistema originalmente:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & Z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeita a} & x_1 \leqslant 4 \,; \\ & 2x_2 \leqslant 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leqslant 18 \\ & x_1 \geqslant 0 \quad x_2 \geqslant 0 \end{array}$$

Introduzindo três variáveis residuais teremos:

$$\text{Maximizar} \quad Z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{sujeita a} \quad \begin{array}{lllll} x_1 & & + x_3 & & = 4 \\ & 2x_2 & & + x_4 & = 12 \\ 3x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 18 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$$

Exemplo 9: Uma fábrica de cintos confecciona dois tipos de produto: um modelo de luxo e um modelo comum. Cada um dos modelos utiliza a mesma quantidade de couro. Cintos comuns requerem 1 hora de trabalho, cintos de luxo requerem 2 horas de trabalho. Cada semana a fábrica tem disponíveis $40\,m^2$ de couro e 60 horas de trabalho. Cada cinto consome $1\,m^2$ de couro. O lucro proveniente dos cintos comuns é de \$3 e dos de luxo é \$4.

Qual é o problema de P.L. na forma padrão para que maximizemos o lucro semanal da fábrica.

Na forma usual teríamos:

Definindo x_1: nº de cintos comuns por semana . x_2 : nº de cintos de luxo/semana

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

sujeita a

$$x_1 + x_2 \leq 40 \quad \text{(quantidade de couro)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 60 \quad \text{(horas de trabalho)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Introduzindo 2 variáveis residuais reescrevemos:

$$\max Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$\text{sujeita a} \quad \begin{array}{llll} x_1 + x_2 & + s_1 & & = 40 \\ x_1 + 2x_2 & & + s_2 & = 60 \end{array}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad s_1, s_2 \geq 0$$

Da mesma maneira podemos reduzir problemas de P.L. com "$\geq$" à equações observando que

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6 \quad \text{é equivalente a}$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$3x_1 + 2x_2 - e_1 = 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad e_1 \geq 0$$

Exemplo 10: Nos deparamos com a difícil decisão de escolha do que comer em uma dieta. Suponhamos que nossa dieta requer que toda comida que consumirmos provenha de 4 ~~tipos~~ tipos básicos: bolo de chocolate, sorvete, coca-cola e torta de morango. Cada fatia de bolo de chocolate custa R\$2,00. Cada sorvete (chicabon) custa R\$1,50. Cada latinha de coca-cola custa R\$ 1,70 e cada pedaço de torta de morango custa R\$ 2,50. Cada dia devemos ingerir no mínimo 500 calorias, 170g de chocolate, 280g de açúcar e 220g de gordura. Formule o problema de P.L. na forma padrão de maneira a minimizar o custo de nossa maravilhosa dieta.

Definimos: x_1 : nº de ~~brownies~~ fatias do bolo consumidas por dia
x_2 : nº de chicabons por dia
x_3 : nº de latas de coca-cola por dia
x_4 : nº de fatias de torta consumidas por dia.

Precisamos da tabela de valores nutricionais para nossos 4 tipos básicos de comida que é dada a seguir:

(52)

	Calorias	Chocolate	Açúcar	Gordura
Bolo de chocolate	400	85g	55g	55g
Chicabon	200	55g	55g	110g
Coca-Cola	150	0	110g	25g
Torta de morango	500	0	110g	140g

O problema será então:

Minimizar $Z = 2x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}7x_3 + 2{,}5x_4$

Sujeito a

Calorias diárias $400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 \geq 500$

chocolate $85x_1 + 55x_2 \geq 170$

açúcar $55x_1 + 55x_2 + 110x_3 + 110x_4 \geq 280.$

gordura $55x_1 + 110x_2 + 25x_3 + 140x_4 \geq 220$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$

Na forma padrão teríamos:

Minimizar $Z = 2x_1 + 1{,}5x_2 + 1{,}7x_3 + 2{,}5x_4$

Sujeito a

$$\begin{aligned}
400x_1 + 200x_2 + 150x_3 + 500x_4 - e_1 &= 500 \\
85x_1 + 55x_2 - e_2 &= 170 \\
55x_1 + 55x_2 + 110x_3 + 110x_4 - e_3 &= 280 \\
55x_1 + 110x_2 + 25x_3 + 140x_4 - e_4 &= 220
\end{aligned}$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$

$e_1 \geq 0 \quad e_2 \geq 0 \quad e_3 \geq 0 \quad e_4 \geq 0$

Obs: Note que para utilizar programas como o glpsol não é necessário apresentar em CPLEX LP o problema na forma padrão. O próprio glpsol se encarrega da padronização.

6. Simplex em Linguagem Algébrica

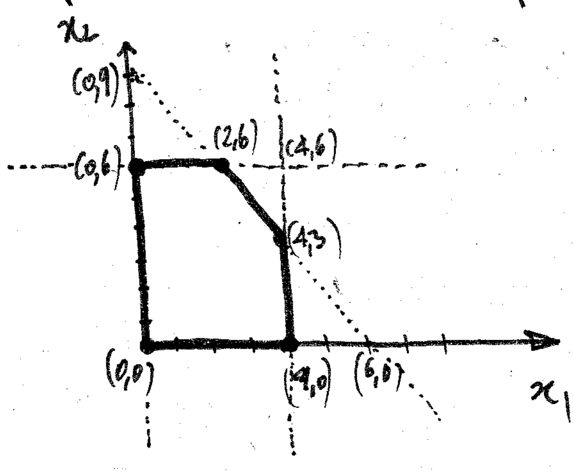
Retomamos mais uma vez o problema de P.L. definido no exemplo 3.

Maximizar $Z = 3x_1 + 5x_2$

sujeita a

$$
\begin{aligned}
x_1 &\leq 4 \\
2x_2 &\leq 12 \\
3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\
x_1 \geq 0 \quad & x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

A região permissível é definida pela intersecção dos vínculos acima.



Na forma padrão temos:

$$
Z = 3x_1 + 5x_2
$$

$$
\begin{cases}
x_1 + x_3 = 4 \\
2x_2 + x_4 = 12 \\
3x_1 + 2x_2 + x_5 = 18
\end{cases}
$$

$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0 \quad x_5 \geq 0$

O novo sistema de equações ~~tem~~ é definido por $n = 5$ variáveis mas apenas $m = 3$ equações. ~~O núm~~ Isto significa que há certa liberdade para acharmos soluções. Dizemos que o sistema tem

$$r = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{número de variáveis}}}{n} - \underset{\substack{\uparrow \\ \text{número de equações}}}{m}$$

graus de liberdade.

Neste caso temos $r = 2$.

Podemos escolher duas variáveis de forma arbitrária e ainda assim solucionarmos o sistema. Por exemplo, se fizermos

$$(i) \quad x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$$

uma solução será $x_3 = 4$, $x_4 = 12$, $x_5 = 18$.

Agora se fizermos

$$(ii) \quad x_1 = 0 \qquad x_4 = 0$$

uma solução será $x_2 = 6$, $x_3 = 4$, $x_5 = 6$.

Da mesma maneira, se fizermos

(iii) $x_1 = 0$ $\qquad x_5 = 0$ $\qquad$ teremos

como solução $x_2 = 9$ $\quad x_3 = 4$ $\quad x_4 = -6$

No entanto note que $x_1 = 0$ e $x_3 = 0$ não resolve o sistema de equações.

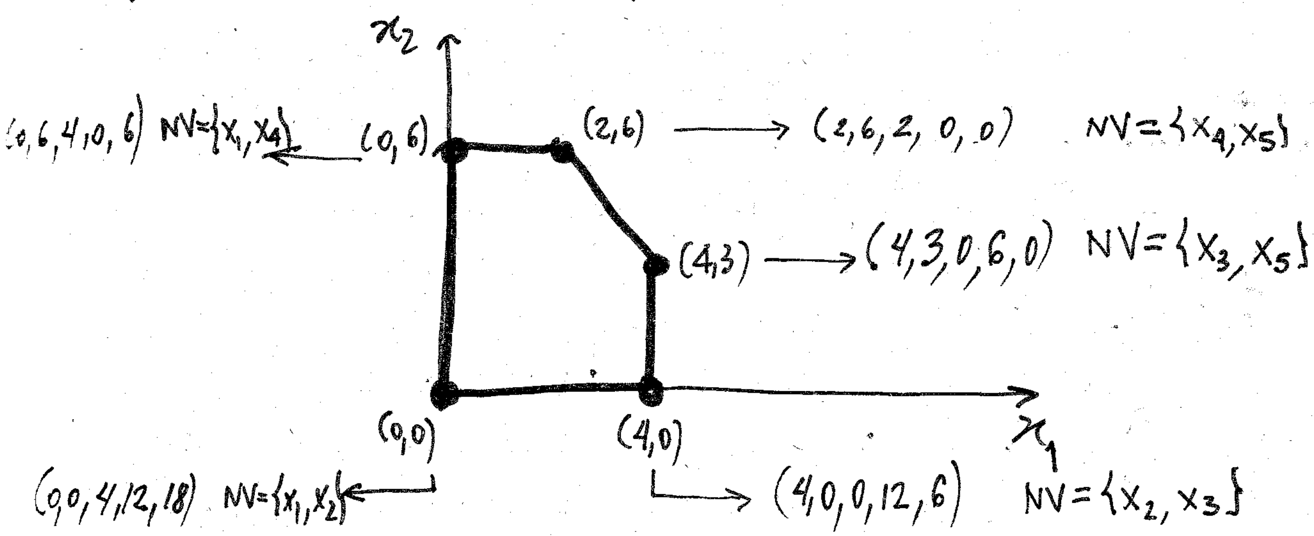
As variáveis que escolhemos arbitrariamente (nos casos acima escolhemos iguais a zero) são conhecidas como variáveis não-básicas.

As variáveis restantes são denominadas <u>variáveis básicas</u>. Ao fixarmos as variáveis não-básicas em zero e obtermos uma solução ajustando os valores das variáveis restantes, obtemos uma <u>solução básica</u>. Assim em (i), (ii) e (iii) acima produzimos as seguintes soluções básicas:

(i) $(0, 0, 4, 12, 18)$ $\quad NV = \{x_1, x_2\}$
(ii) $(0, 6, 4, 0, 6)$ $\quad NV = \{x_1, x_4\}$
(iii) $(0, 9, 4, -6, 0)$ $\quad NV = \{x_1, x_5\}$

Aqui NV representam conjuntos de variáveis não-básicas. Note que apenas x_1 e x_2 representam variáveis de decisão do problema original. Observando novamente a figura da página 53 percebemos que (i) e (ii) estão dentro da região permissível, enquanto (iii) está fora. As soluções (i) e (ii) são denominadas <u>soluções básicas factíveis</u>.

Cada solução de vértice é obtida pela escolha de duas particulares variáveis não-básicas. Duas soluções de vértice adjacentes diferem em <u>apenas uma</u> das variáveis não-básicas.



Algebricamente o algoritmo Simplex pode ser descrito pelos seguintes passos:

1. Converta o problema para a forma padrão.
2. Encontre uma solução ~~facti~~ básica factível qualquer.
3. Determine se a solução ~~atual~~ básica factível do momento é ótima.
4. Se a solução não for ótima, determine qual variável básica deveria se tornar não-básica (isto é, deveria ser zerada), de maneira a encontrar uma nova solução básica factível com valor de função objetivo melhor.
5. Retorne ao passo **3**.

Exemplo 11. Retomamos mais uma vez o Exemplo 3, que já foi tratado de forma geométrica no Exemplo 7.

INÍCIO. Passo 1.

$$
\begin{aligned}
Z - 3x_1 - 5x_2 &= 0 \\
x_1 + x_3 &= 4 \\
2x_2 + x_4 &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 + x_5 &= 18
\end{aligned}
$$

Aqui incluímos a própria função objetivo como uma equação (conhecida como linha 0).

Iter1. Passo 2. Se escolhermos $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ temos uma solução básica factível trivial $(0, 0, 4, 12, 8)$.

Iter1. Passo 3. Para que uma solução seja ótima é necessário que a função objetivo apresente valores piores em todas as soluções adjacentes. Note que cada solução adjacente é obtida aumentando o valor de uma das variáveis não-básicas (ou seja, transformando uma variável não-básica em básica e vice-versa), Se a função objetivo estiver escrita em termos apenas de variáveis não-básicas ~~[illegible]~~ o ~~critério~~ teste de otimalidade se reduzirá à verificação dos sinais dos coeficientes associados a cada variável. Assim, se estivermos maximizando a função objetivo estes coeficientes deverão ser ~~positivos~~ negativos, se tivermos minimizando estes coeficientes deverão ser positivos para valer o critério de otimalidade. No nosso caso temos

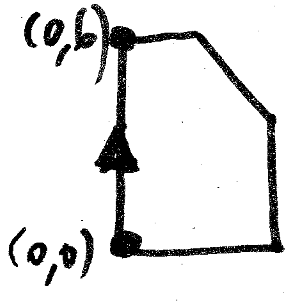
$$Z = 3x_1 + 5x_2 .$$

Os dois coeficientes (3 e 5) são positivos e é possível aumentar a função objetivo aumentando qualquer uma das duas variáveis não-básicas. A solução atual não é ótima.

Iterl. Passo 4. A função objetivo varia mais rapidamente na direção x_2. Assim, manteremos x_1 como variável não-básica ($x_1 = 0$) e aumentaremos x_2. Temos então o seguinte sistema de equações.

$$x_1 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 12 - 2x_2$$
$$x_5 = 18 - 2x_2$$

Como $x_4, x_5 \geq 0$ temos que $x_2 \leq 6$. Se aumentarmos x_2 até seu limite na região permissível ~~teremos~~ chegaremos à seguinte solução básica: $(0,6,4,0,6)$. Note que este passo corresponde a caminharmos algebricamente pela aresta que vai de $(0,0)$ à $(0,6)$ na figura.



Iter 2. Passo 3. Precisamos testar a otimalidade da nossa nova solução básica. Para isso precisamos escrever a função objetivo em termos das variáveis não-básicas do momento, ou seja, $NV = \{x_1, x_4\}$.

~~Dois sistemas lineares são~~ Um sistema linear pode ser manipulado livremente através de somas de duas ou mais de suas equações ou ~~produtos nos dois lados~~ multiplicações por constantes que afetem os dois lados de suas equações. Este procedimento é conhecido como eliminação de Gauss-Jordan e serve tanto para reescrevermos a função objetivo em termos das variáveis não-básicas quanto para resolvermos o sistema linear. Começaremos com o sistema linear original e procuraremos reescrever sua linha 0 em termos de x_1 e x_4 e as restantes em termos de apenas uma variável básica por equação com coeficiente unitário.

$$
\begin{array}{llcl}
r0. & Z - 3x_1 - 5x_2 & = & 0 \\
r1. & x_1 + x_3 & = & 4 \\
r2. & 2x_2 + x_4 & = & 12 \\
r3. & 3x_1 + 2x_2 + x_5 & = & 18
\end{array}
$$

~~a. Dividimos (r2) por 2.~~
~~b.~~

a. Subtraímos (r2) de (r3).
b. Dividimos (r2) por 2.
c. Somamos 5 vezes (r2) com (r0)

$$
\begin{array}{llcl}
\tilde{r}_0. & Z - 3x_1 + \frac{5}{2}x_4 & = & 30 \\
\tilde{r}_1. & x_1 + x_3 & = & 4 \\
\tilde{r}_2. & x_2 + \frac{1}{2}x_4 & = & 6 \\
\tilde{r}_3. & 3x_1 - x_4 + x_5 & = & 6
\end{array}
$$

Note que na nova forma o sistema nos fornece, de imediato, a solução básica $(0,6,4,0,6)$ e o valor da função objetivo no vértice $(0,6)$, $Z=30$.

Em termos das variáveis não básicas $NN=\{x_1,x_4\}$ a função objetivo é

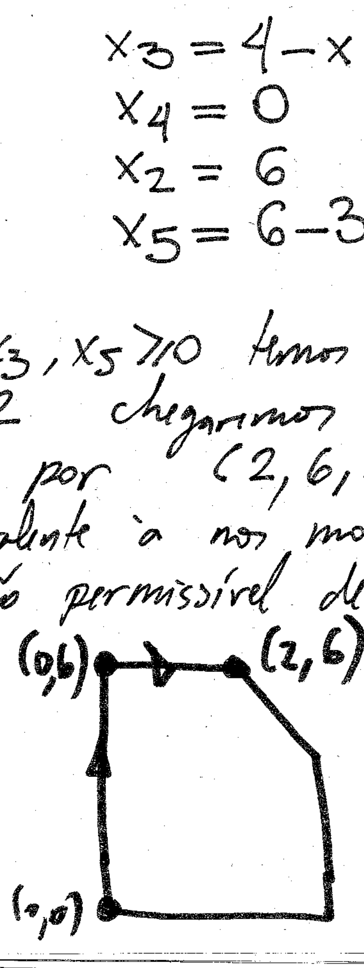
$$Z=30+3x_1-\frac{5}{2}x_4$$

Assim, se alterarmos x_1 Z crescerá; se alterarmos x_4 Z diminuirá. Como buscamos o máximo de Z, concluímos que a atual solução básica <u>não</u> é ótima.

Iter 2, Passo 4. Z cresce apenas se aumentarmos x_1. Manteremos, portanto, $x_4=0$ (variável não-básica). Temos então:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4-x_1 \\ x_4 &= 0 \\ x_2 &= 6 \\ x_5 &= 6-3x_1 \end{aligned}$$

Como $x_3, x_5 \geq 0$ temos que $x_1 \leq 2$. Se alterarmos x_1 até 2 chegaremos a uma nova solução básica definida por $(2,6,2,0,0)$. Aumentarmos x_1 foi equivalente a nos movermos através da fronteira da região permissível de acordo com a figura.



Iter 2. Passo 3. Novamente precisamos verificar a otimalidade da solução. Para isso rearranjaremos o sistema de equações para que a função objetivo seja escrita em termos de $NV = \{x_4, x_5\}$. Para isso:

a. Somamos $(\tilde{r}_0)$ e $(\tilde{r}_3)$,
b. Dividimos $(\tilde{r}_3)$ por 3.
c. Subtraímos $(\tilde{r}_3)$ de $(\tilde{r}_1)$.

$$
\begin{array}{llllll}
r_0'. & Z + & & & \frac{3}{2}x_4 + x_5 & = 36 \\
r_1'. & & & + x_3 & + \frac{x_4}{3} - \frac{x_5}{3} & = 2 \\
r_2'. & & + x_2 & & + \frac{1}{2}x_4 & = 6 \\
r_3'. & & x_1 & & - \frac{x_4}{3} + \frac{x_5}{3} & = 2
\end{array}
$$

Temos então que $Z = 36 - \frac{3}{2}x_4 - x_5$.
Se aumentarmos tanto x_4 quanto x_5 reduziremos Z. Temos, portanto, uma solução ótima no vértice $(2,6)$ com valor $Z = 36$.

FIM

7. Simplex Tableau

O tableau Simplex (ou tabela simplex) é um procedimento que permite a implementação do algoritmo simplex com papel e lápis somente.

Digamos que queiramos resolver o seguinte problema de P.L.:

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2 - x_3$

sujeito à

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 &\leq 30 \\ x_1 \geq 0 \; ; \; x_2 \geq 0 \; &; \; x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Passo 1. Reescrevemos o problema na forma padrão:

Maximizar $Z = x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 \quad\quad\quad &= 14 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad + s_2 \quad &= 28 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 \quad\quad + s_3 &= 30 \\ x_1 \geq 0 ; x_2 \geq 0 ; x_3 \geq 0 ; s_1 \geq 0 ; s_2 &\geq 0 ; s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Passo 2. Construímos o Simplex Tableau

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\ 2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 30 \\ \hline \underbrace{-1 & -2 & +1}_{\text{coeficientes da função objetivo com sinal trocado}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

} lado direito das equações

← LINHA INDICADORA

Construído o tableau utilizaremos iterativamente os passos descritos a seguir até que todas as entradas na LINHA INDICADORA sejam positivas ou nulos.

PASSO ITERATIVO.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ \text{linha pivot} \rightarrow r_3 \\ r_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\
2 & 5 & 5 & 0 & 0 & 1 & 30 \\
\hline
-1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

teste de razões

$\frac{14}{1} = 14$

$\frac{28}{2} = 14$

$\frac{30}{5} = 6$

A. Escolhemos como <u>coluna pivot</u> aquela com valor mais negativo na linha indicadora (no caso -2).

B. Escolhemos como <u>linha pivot</u> aquela com menor razão no <u>teste de razões</u>.

C. O pivot está indicado por uma circunferência. Multiplicamos a linha pivot por uma constante de maneira a fazermos do pivot uma unidade. A operação adequada é

$$R_3 = \frac{r_3}{5} \quad \text{, onde } R_3 \text{ é a nova linha 3.}$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ R_3 \\ r_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 14 \\
4 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 28 \\
\frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\
\hline
-1 & -2 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
$$

D. A coluna pivot deve conter apenas o pivot como termo não nulo. Para isso podemos produzir novas linhas multiplicando a linha pivot por uma constante e somando com as outras. Assim fazemos:

$$R_1 = r_1 - R_3$$

$$R_2 = r_2 - 2R_3$$

$$R_4 = r_4 + 2R_3$$

O resultado é:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c}
\frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 8 \\
\frac{16}{5} & 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 16 \\
\frac{2}{5} & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\
\hline
-\frac{1}{5} & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 12
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Agora repetimos o passo iterativo até que a LINHA INDICADORA contenha apenas valores positivos ou nulos.

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\text{A.}\ r_1 & \left[\begin{array}{cccccc|c} 8/5 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/5 & 8 \\
16/5 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2/5 & 16 \\
2/5 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 6 \\ \hline
-1/5 & 0 & 3 & 0 & 0 & 2/5 & 12 \end{array}\right] \\
\text{pivot } r_2 \rightarrow & \\
\text{B.}\ r_3 & \\
r_4 &
\end{array}
$$

$8/\frac{8}{5} = 5$ \
$16/\frac{16}{5} = 5$ } escolho um destes \
$6/\frac{2}{5} = 15$

C. $R_2 = r_2\left(\frac{5}{16}\right)$

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} r_1 \\ R_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c} \frac{8}{5} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & 8 \\
1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & 5 \\
2/5 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 6 \\ \hline
-\frac{1}{5} & 0 & 3 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & 12 \end{array}\right]
\end{array}
$$

D.
$$R_1 = r_1 - \frac{8}{5}R_2$$
$$R_3 = r_3 - \frac{2}{5}R_2$$
$$R_4 = r_4 + \frac{1}{5}R_2$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
1 & 0 & \frac{5}{16} & 0 & \frac{5}{16} & -\frac{1}{8} & 5 \\
0 & 1 & \frac{7}{8} & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 4 \\ \hline
0 & 0 & \frac{49}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{3}{8} & 13 \end{array}\right]
\end{array}
$$

Todos positivos ou nulos → Tableau FINAL!

LEITURA DA SOLUÇÃO

As variáveis com colunas contendo mais de um valor ~~≠~~ não nulo ~~..~~ indicam variáveis não-básica que têm valor nulo, assim, $x_3 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$. As outras têm o valor da última coluna $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $S_1 = 0$.

A solução ótima é, portanto,

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\ (5, & 4, & 0, & 0, & 0, & 0) \end{array}$$

As variáveis s_1, s_2 e s_3 são apenas auxiliares. A solução final é então:

$$x_1 = 5$$
$$x_2 = 4$$
$$x_3 = 0$$

O valor de Z aparece na ~~coluna~~ última coluna e última linha sendo $Z = 13$.

Exemplo 11. Resolva o problema do exemplo 3 (Fábrica de porta e janela) utilizando o Tableau Simplex.

O problema original é

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 5x_2$$

sujeito à

$$x_1 \leq 4$$
$$2x_2 \leq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Na forma padrão teremos

$$\begin{array}{llllll} \text{Max } Z = & 3x_1 & + 5x_2 & & & \\ \text{sujeito à} & x_1 & & + s_1 & & = 4 \\ & & 2x_2 & & + s_2 & = 12 \\ & 3x_1 & + 2x_2 & & + s_3 & = 18 \end{array}$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad s_1 \geq 0 \quad s_2 \geq 0 \quad s_3 \geq 0$$

Construindo o Tableau

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		Razões
r_1	1	0	1	0	0	4	∞
r_2	0	2	0	1	0	12	6
r_3	3	2	0	0	1	18	9
r_4	-3	-5	0	0	0	0	

$R_2 = r_2/2$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
r_1	1	0	1	0	0	4
R_2	0	1	0	$1/2$	0	6
r_3	3	2	0	0	1	18
r_4	-3	-5	0	0	0	0

$R_1 = r_1$

$R_3 = r_3 - 2R_2$

$R_4 = r_4 + 5R_2$

Primeira Iteração

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		Razões
R_1	1	0	1	0	0	4	4
R_2	0	1	0	$1/2$	0	6	∞
R_3	3	0	0	-1	1	6	2
R_4	-3	0	0	$5/2$	0	30	

~~Primeira Iteração~~

$R_3 = r_3/3$

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
r_1	1	0	1	0	0	4
r_2	0	1	0	$1/2$	0	6
R_3	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2
r_4	-3	0	0	$5/2$	0	30

$R_1 = r_1 - R_3$ $\quad$ $R_4 = r_4 + 3R_3$

$R_2 = r_2$

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\
\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array} &
\left[\begin{array}{ccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 2 \\
0 & 1 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \\
1 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 3/2 & 1 & 36
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Lendo a solução:

$x_1 = 2$
$x_2 = 6$
$s_1 = 2$ $\qquad Z = 36$
$s_2 = 0$
$s_3 = 0$

Agora compare esta solução com a figura da página 55.

Exemplo 12. Utilize o tableau Simplex para resolver o seguinte problema:

$$
\begin{aligned}
\max \quad z = {} & 2x_1 - x_2 + x_3 \\
\text{sujeito a} \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 \leq 60 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Primeiro colocamos o problema na forma padrão:

$$
\begin{aligned}
\max z = {} & 2x_1 - x_2 + x_3 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 60 \\
& x_1 - x_2 + 2x_3 + s_2 = 10 \\
& x_1 + x_2 - x_3 + s_3 = 20 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0 \quad s_1, s_2, s_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

Construindo o tableau

$$\begin{array}{c} \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}
\begin{array}{c} \text{razões} \\ 20 \\ 10 \\ 20 \\ \end{array}$$

$R_2 = r_2$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ R_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 60 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 20 \\ \hline -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$R_1 = r_1 - 3R_2$
$R_3 = r_3 - R_2$
$R_4 = r_4 + 2R_2$

$$\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & -1 & 1 & 10 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 20 \end{array}\right]
\begin{array}{c} \text{razões} \\ 30/4 \\ 10/-1 \\ 10/2 = 5 \end{array}$$

$R_3 = r_3/2$

$$\begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \\ R_3 \\ r_4 \end{array}
\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 4 & -5 & 1 & -3 & 0 & 30 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 & -1/2 & 1 & 5 \\ \hline 0 & -1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 20 \end{array}\right]$$

$R_1 = r_1 - 4R_3$
$R_2 = r_2 + R_3$
$R_4 = r_4 + R_3$

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & s_2 & s_3 \\
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -4 & 10 \\
1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 15 \\
0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 5 \\
0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \frac{3}{2} & 1 & 25
\end{array}\right]
$$

Lendo a solução

$\boxed{x_1 = 15}$

$s_1 = 10$

$\boxed{\begin{array}{l} x_2 = 5 \\ x_3 = 0 \end{array}}$

$s_2 = 0$

$s_3 = 0$

$Z = 25$

EXERCÍCIOS

Exercício 1 Uma fábrica resolveu interromper a produção de uma certa linha de produtos que estava gerando prejuízo. Isto criou um excesso de capacidade de produção. A gerência pensa em alocar este excesso de capacidade em um ou mais de três novos produtos. Chamemos estes produtos de 1, 2 e 3. A capacidade disponível é listada na tabela a seguir.

Máquina	Tempo disponível (horas/semana)
A	500
B	350
C	150

O número de horas necessárias para a produção de cada um dos produtos é:

(em horas / unidade)

Máquina	1	2	3
A	9	3	5
B	5	4	0
C	3	0	2

O departamento de vendas indica que o potencial de vendas dos produtos 1 e 2 é o máximo da capacidade de produção. Para o produto 3 o limite de vendas é de 20 unidades / semana. O lucro por unidade é estimado em \$30, \$20 e \$15 para os produtos 1, 2 e 3 respectivamente.

(a) Formule o ~~pr~~ modelo de programação linear para determinar quanto de cada produto deve ser fabricado para maximização do lucro.

(b) Resolva o problema utilizando o Tableau Simplex.

(c) Escreva o código para solução do problema em CPLEX LP. Rode o glpsol e confira a solução obtida no item (b).

Exercício 2 Use o método gráfico para resolver o seguinte modelo de P.L.

$$\text{Max } Z = 2x_1 + x_2$$

Sujeito a

$$x_2 \leq 10$$
$$2x_1 + 5x_2 \leq 60$$
$$x_1 + x_2 \leq 18$$
$$3x_1 + x_2 \leq 44$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Exercício 3 Utilize o método gráfico e o ~~Tableau~~ Simplex para resolver o seguinte modelo de PL

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + 4x_2 \leq 22$$
$$-x_1 + 4x_2 \leq 10$$
$$2x_1 - x_2 \leq 7$$
$$x_1 - 3x_2 \leq 1$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

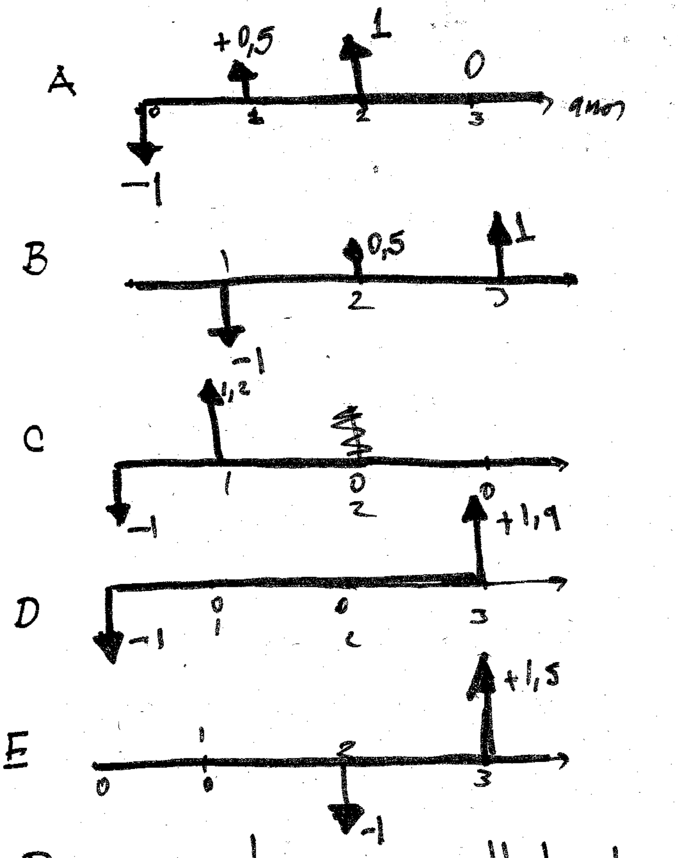
Exercício 4 Um criador de porcos deseja determinar as quantidades de alimentos que devem ser fornecidos aos animais para suprir necessidades nutricionais com custo mínimo. Os números de cada tipo de nutrientes contidos em ~~...~~ 1 kg de cada tipo de alimento são listados a seguir: (por dia)

Ingrediente	Ração 1	Ração 2	Ração 3	Mínimo necessário
A	9	2	4	20
B	3	8	6	18
C	1	2	6	15
Custos	7	6	5	

(a) Formule o modelo de P.L.
(b) Formule o modelo na forma padrão.
(c) Esboce o código CPLEX LP para solução do problema

8. Aplicação Financeira: Modelo Multiperíodos

~~Exem~~ Exemplo 13. Uma empresa de investimento precisa determinar uma estratégia para a empresa nos próximos três anos. No momento presente (data 0) estão disponíveis U\$100.000 para investir. São ~~quatro~~ cinco as opções de investimento A, B, C, D e E. Os fluxos de caixa associados a cada U\$1,00 em cada investimento são descritos a seguir:



No máximo ~~Pelo~~ ~~pelos~~ U\$75000,00 devem ser investidos em um único investimento.

Além destes possíveis investimentos a empresa pode ganhar 8% deixando o dinheiro aplicado em títulos públicos. Todos os retornos de um investimento podem ser reinvestidos automaticamente.

Por exemplo o resultado do investimento C no ano 1 poderia ser integralmente e imediatamente investido em B, por exemplo. Não é possível ~~emprestar~~ tomar emprestado fundos extras. Gostaríamos de maximizar o dinheiro em caixa no ano 3.

Temos as seguintes variáveis: A, B, C, D, E quantias investidas
S_t quantia em títulos públicos na data t.

72

O dinheiro em caixa no ano 3 é pelos fluxos de caixa dado por $Z = B + 1,9D + 1,5E + 1,08 S_2$.
Temos que apenas o dinheiro a ser investido no início de cada período pode ser considerado disponível assim:

Quantia disponível em t = Quantia investida em t

No ano 0 temos: $A + C + D + S_0 = 100.000$
No ano 1 : $0,5A + 1,2C + 1,08 S_0 = B + S_1$
No ano 2 : $A + 0,5B + 1,08 S_1 = E + S_2$

Temos que a cada ano no máximo U\$75.000 deve estar investido, portanto:

$$A \leq 75000$$
$$B \leq 75000$$
$$C \leq 75000$$
$$D \leq 75000$$
$$E \leq 75000$$

Finalmente temos o seguinte modelo de programação linear multiperíodo:

Maximizar $Z = B + 1,9D + 1,5E + 1,08 S_2$
sujeita a
$$A + C + D + S_0 = 100.000$$
$$0,5A + 1,2C + 1,08 S_0 - B - S_1 = 0$$
$$A + 0,5B + 1,08 S_1 - E - S_2 = 0$$
$$A \leq 75000$$
$$B \leq 75000$$
$$C \leq 75000$$
$$D \leq 75000$$
$$E \leq 75000$$
$$A, B, C, D, E, S_0, S_1, S_2 \geq 0$$

* Experimente resolver-lo utilizando glpsol.

+3

Exercício 5

Uma pequena loja de departamentos tem R$ 10000 disponíveis em dinheiro. No início de cada um dos próximos 6 meses, a loja ~~irá~~ estima que irá ~~receber~~ lucrar e terá ~~a~~ ~~pagar~~ despesas nas quantias listadas na tabela a seguir:

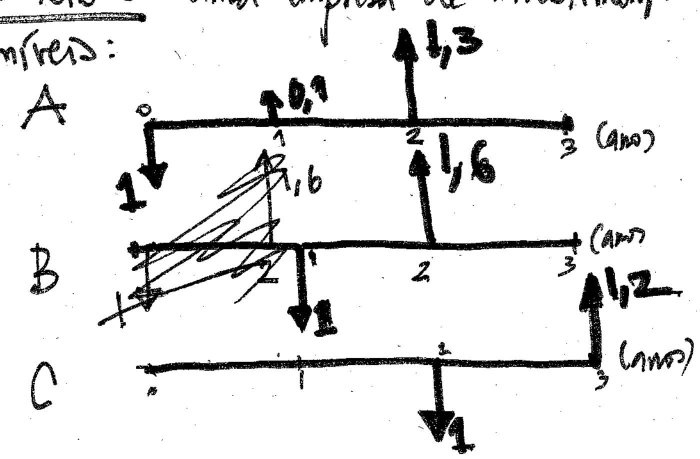
	Lucro	Despesas
Julho	10.000	50.000
Agosto	20.000	50.000
Setembro	20.000	60.000
Outubro	40.000	20.000
Novembro	70.000	20.000
Dezembro	90.000	10000

Claramente a empresa terá problemas de caixa no curto prazo até que ~~receba~~ realize os lucros provenientes das festas de fim de ano.

Para resolver suas necessidades de caixa a loja terá que ~~em~~ tomar emprestado dinheiro. No início de julho a loja irá contratar um empréstimo por 6 meses. O dinheiro precisará ser pago integralmente no final de dezembro ~~com~~ acrescido de juros de 9% no período. Além disso a empresa também planeja administrar seu caixa contraindo empréstimos mensais cada um deles a ser pago em um mês exatamente com juros de 4% a.m.! Construa um modelo de programação linear para determinar como a loja pode minimizar o custo de pagar sua dívida no prazo correto.

Exercício 6

Uma empresa de investimento tem as seguintes opções disponíveis:



Dinheiro não investido permanece em T-bills (títulos do governo americano) rendendo 4,5% a.a.

(79)

Na data 0 (ano 0) temos U$ 100.000. Para controlarmos o risco desejamos colocar no máximo U$ 50.000 em um único investimento (A, B ou C, pois T-bills não têm risco). (a) Formule um modelo de P.L. para maximizar o montante ao final do ano 3.

(b) Utilize o glpsol para resolver o modelo.