# Resolução de Exercícios

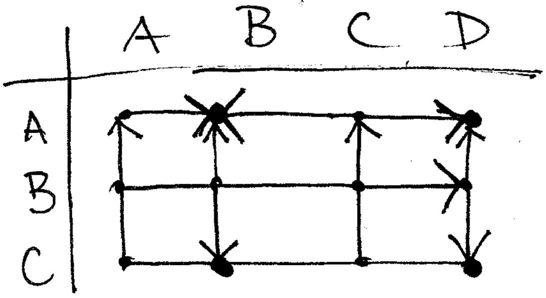
## Cap III

(1)

(a)

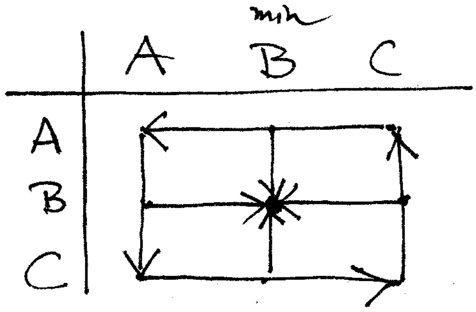
| | A | B | C | D | min linha | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 2 | 4 | 2 | 2 | max |
| B | 2 | 1 | 3 | 0 | 0 | |
| C | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | max |
| maxcol | 3 | 2 | 4 | 2 | | |
| | | min | | min | | |

4 ptos de sela




(b)

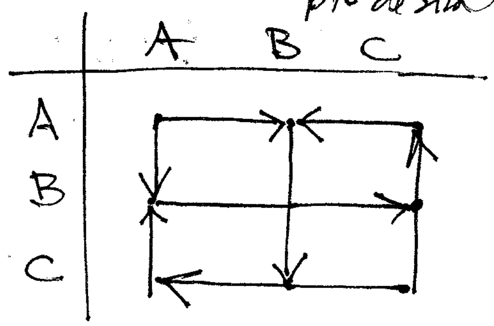
| | A | B | C | min linha | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | −2 | 0 | 4 | −2 | |
| B | 2 | 1 | 3 | 1 | max |
| C | 3 | −1 | −2 | −2 | |
| maxcol | 3 | 1 | 4 | | |
| | | min | | | |




(c)

| | A | B | C | min linha | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 4 | 3 | 8 | 3 | max |
| B | 9 | 5 | 1 | 1 | |
| C | 2 | 7 | 6 | 2 | |
| maxcol | 9 | 7 | 8 | | |
| | min | | | | |

nenhum pto de sela



(2)

| | | J2 A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| | A | 3 | -6 | 2 | -4 |
| J1 | B | 2 | 1 | 0 | 1 |
| | C | -4 | 3 | 5 | 4 |

J2 : B domina D

| | | J2 A | B | C |
|---|---|---|---|---|
| | A | 3 | -6 | 2 |
| J1 | B | 2 | 1 | 0 |
| | C | -4 | 3 | 5 |

(3) Pedra = S

(a) Tesoura = T

Papel = P

| | | J2 S | T | P |
|---|---|---|---|---|
| | S | 0 | 1 | -1 |
| J1 | T | -1 | 0 | 1 |
| | P | 1 | -1 | 0 |

(b) Não há ptos de sela.

Supunhamos que a estratégia do jogador 1 seja

$$\underline{P} = (p_1, p_2, 1-p_1-p_2)$$

A estratégia ótima $\underline{P}^*$ corresponde a escolha que faça com que os payoffs esperados do J1 independam daquilo que J2 fizer. Assim temos:

$$-p_2^* + (1-p_1^*-p_2^*) = +p_1^* - (1-p_1^*-p_2^*) =$$
$$= -p_1^* + p_2^*$$

$$1 - p_1^* - 2p_2^* = 2p_1^* - 1 + p_2^* = p_2^* - p_1^*$$

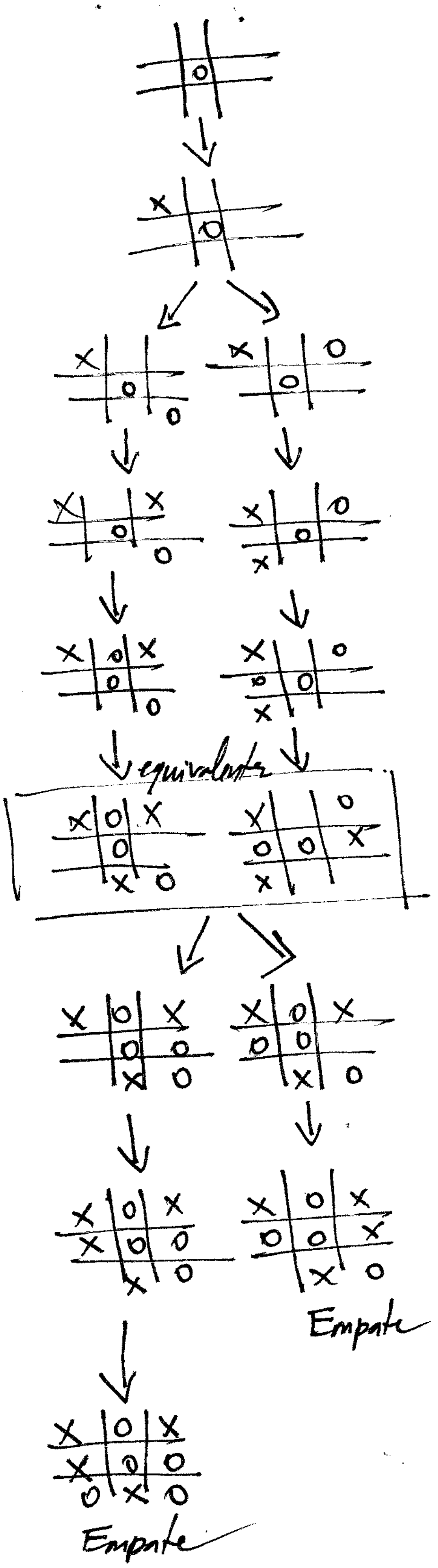
Cuja solução é $p_1^* = p_2^* = \frac{1}{3}$

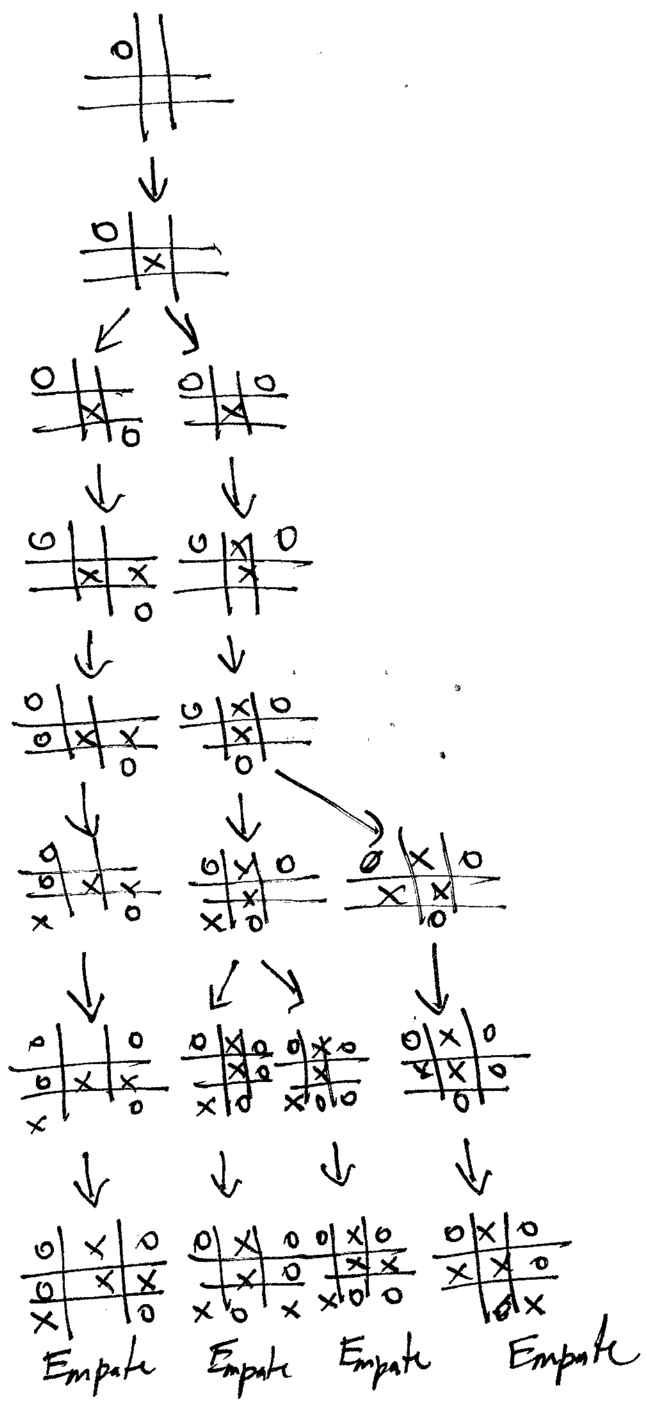
$$\underline{P}^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

O valor do jogo é $v = 0$ (empate)

A ~~melhor~~ solução ótima é, portanto, alternar Pedra, Tesoura e Papel de forma completamente aleatória.

(4) Por simplicidade apenas representamos duas formas de início: no centro e no canto. Somente precisamos representar um dos cantos já que os outros podem ser obtidos através de uma simples rotação. Também supomos que ~~agentes~~ jogadores racionais não fazem movimentos que resultem em vitória certa do adversário. ~~Dessa forma eliminamos~~




6 caminhos × 4 rotações × 2 reflexões = 48 caminhos terminando em empate

$\boxed{\text{O jogo é honesto}}$ ←

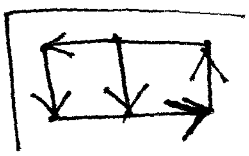
(5)

| | | P1 | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | min linha |
| | 1 | 7 | -1 | 3 | -1 |
| P1 | 2 | 1 | 0 | 2 | 0 max |
| | 3 | -5 | -3 | -1 | -5 |
| | max col. | 7 | 0 min | 3 | |

O pto de sela é P1 joga 2 e P2 joga 1. Se supusermos que os políticos são igualmente racionais deveríamos escolher o assunto 2 para ênfase.

(6)

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| A | -2 | 0 | 2 |
| B | 3 | 1 | -1 |



(7)

| | | Colin A | Colin B |
|---|---|---|---|
| Rose | A | a | b |
| Rose | B | c | d |

(a) ~~De~~ estratégia de Colin é

$$Q = (x, 1-x)$$

O valor de $x$ que faz com que o payoff esperado de Colin seja indiferente às escolhas de Rose será dado por:

$$ax + b(1-x) = cx + d(1-x)$$

$$(a-c)x + (b-d) - x(b-d) = 0$$

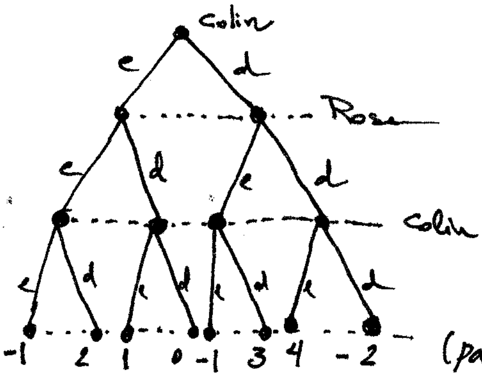
$$\boxed{x = \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}}$$

(b) O valor do jogo será o valor do payoff esperado para $x$ acima:

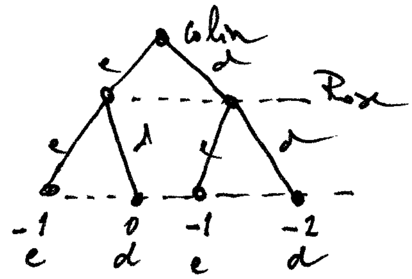
$$a\,\frac{d-b}{(a-c)+(d-b)} + b\left[1 - \frac{d-b}{(a-c)+(d-b)}\right] = v$$

$$\boxed{v = \frac{ad-bc}{(a-c)+(d-b)}}$$

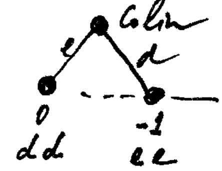
(8) (a) No método do truncamento começamos por desenhar a árvore inteira:



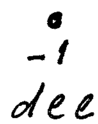

A partir das folhas selecionamos decisões ótimas de cada jogador, começando pela última jogada de Colin (quanto menor melhor, portanto):




Anotamos no último nível as opções ótimas do jogador e os payoffs obtidos. Subindo mais um nível e lembrando que para Rose quanto maior melhor:




Finalmente




A solução ótima é, portanto, Colin d, Rose e, Colin e.

(b) As estratégias disponíveis para Rose são:

1. Jogar e se Colin jogou e ~~(ee)~~ e e se jogou d (ee)
2. Jogar d se Colin jogou e ~~(ed)~~ e d se jogou d (ed)
3. Jogar d se Colin jogou d ~~(de)~~ e e se jogou d (de)
4. Jogar d se Colin jogou d ~~(dd)~~ e d se jogou d (dd)

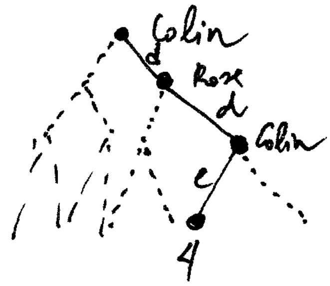
As estratégias de Colin são:

1. Inicia com e, joga e se Rose jogar e e e se Rose jogar d (e/ee)
2. Inicia com e, joga e se Rose jogar e e d se Rose jogar d (e/ed)
3. e/de, 4. e/dd, 5. d/ee, 6. d/ed, 7. d/de, 8. d/dd.

Colocando estas estratégias em uma matriz e calculando os payoffs resultantes em cada situação:

| | | Colin | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | e/ee | e/ed | e/de | e/dd | d/ee | d/ed | d/de | d/dd |
| Rose | ee | -1 | -1 | 2 | 2 | -1 | -1 | 3 | 3 |
| | ed | -1 | -1 | 2 | 2 | 4 | -2 | 4 | -2 |
| | de | 1 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | 3 | 3 |
| | dd | 1 | 0 | 1 | 0 | 4 | -2 | 4 | -2 |

Por exemplo: o par d/dd, ed corresponde a




É fácil perceber que a coluna (colin) (d/ed) domina todas as demais. Como esta coluna representa Colin inicia com d e joga e se Rose jogar e e d se jogar d, temos que Rose deverá responder com e tanto em (ee) quanto em (de) fazendo destas duas estratégias equivalentes. O resultado final será: Colin d, Rose e, Colin e (d ee).

(9) (a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

É pto de sela pois é, simultaneamente, o mínimo da linha e o máximo da coluna. O valor do jogo é $v=4$.

(b) $\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

Não há pontos de sela. Fazendo um cálculo rápido

$$\begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 5 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 7-(-6)=13 \\ 5-8=-3 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 3/16 \\ 13/16 \end{pmatrix} = P^*$$

$$\begin{matrix} 7-5 & -6-(+8) \\ \| & \| \\ 2 & -14 \end{matrix}$$

$$Q^* = \left(\frac{14}{16}, \frac{2}{16}\right)$$

O valor do jogo será:

$$v = \frac{3}{16}\times 7 + \frac{13}{16}\times 5 = \frac{86}{16}$$

$$= (-6)\times\frac{3}{16} + 8\times\frac{13}{16} = \frac{86}{16}$$

(c)
$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 1 & -2 & 3 \\ B & 4 & 1 & 2 \\ C & 3 & -4 & -2 \end{array}$$

~~Não há ptos de sela.~~ B domina A C na coluna. B domina A e C nas linhas restantes. Analogamente, BB é um pto de sela. $v=1$.

(d) $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ Não há ptos de sela.

$$\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} -3-5=-8 \\ 2-(-3)=5 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} 5/13 \\ 8/13 \end{pmatrix} = P^*$$

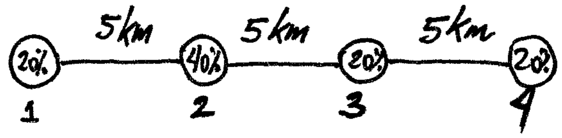
$$\begin{matrix} -3-2=-5 & 5-(-3)=8 \end{matrix}$$

$$Q^* = \left(8/13, 5/13\right)$$

$$v = (-3)\times\frac{5}{13} + 2\times 8/13 = \frac{1}{13}$$

$$= 5\times\frac{5}{13} + (-3)\times 8/13 = \frac{1}{13}$$

(10)




Supondo o payoff diretamente proporcional à população e ao movimento teremos a seguinte matriz para o jogo :

(a)

$$
\begin{array}{cc|cccc|}
 & & & \text{pequena } p & & \\
 & & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 & 1 & 6 & 4{,}8 & 5{,}6 & 6{,}4 \\
\text{grande } G & 2 & 7{,}2 & 6 & 6{,}4 & 7{,}2 \\
 & 3 & 6{,}4 & 5{,}6 & 6 & 7{,}2 \\
 & 4 & 5{,}6 & 5{,}2 & 4{,}8 & 6
\end{array}
$$

Situações:

grande 80% cidade + próxima
60% cidade dist. igual
40% cidade + distante

Suponhamos que a configuração seja G1 p1 neste caso o payoff de G será $0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}6$

Por simplicidade multiplicaremos o resultado por 10 e utilizaremos 6. Repetindo o mesmo cálculo na diagonal teremos as situações nas quais G e p equidistam de toda a cidade. Para a linha G1 temos:

$G1p1 = 6 \qquad G1p2 = (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}2 + 0{,}4 \times 0{,}2) \times 10 = 4{,}8$

$G1p3 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}4) = 5{,}6$

$G1p4 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}4) = 6{,}4$

$G2p1 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8) = 7{,}2$

$G2p3 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}4) = 6{,}4$

$G2p4 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4) = 7{,}2$

$G3p1 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8) = 6{,}4$

$G3p2 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}4 + 0{,}4 \times 0{,}4 + 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8) = 5{,}6$

$G3p4 = 10 \times (0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}4 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}4) = 7{,}2$

(b) G2 domina G1, G3 e G4

~~p2 / do~~

(c) G2p2 é um pto de sela, assim deveríamos instalar a armazém grande em 2, obtendo payoff v=6.

# Cap IV

(1) (a)

| Caminho | Duração |
|---|---|
| Ini→A→D→H→M→Fim | 19 |
| Ini→A→I→M→Fim | 17 |
| Ini→B→E→J→M→Fim | 20 |
| Ini→C→F→K→N→Fim | 16 |
| Ini→C→G→L→N→Fim | 20 |

caminhos críticos

(b)

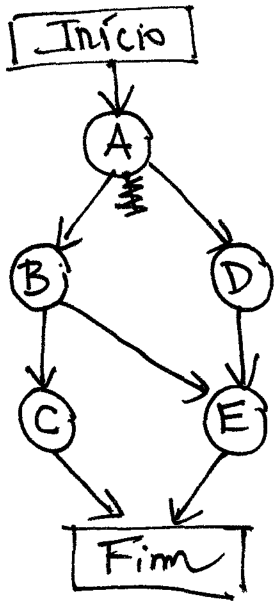
| Atividade | + breve | + tardio | folga |
|---|---|---|---|
| Ini | (0,0) | (0,0) | |
| A | (0,6) | (1,7) | 1 |
| B | (0,3) | (0,3) | — |
| C | (0,4) | (0,4) | — |
| D | (6,10) | (7,11) | 1 |
| E | (3,10) | (3,10) | — |
| F | (4,8) | (8,12) | 4 |
| G | (4,10) | (4,10) | — |
| H | (10,13) | (11,14) | 1 |
| I | (6,11) | (9,14) | 3 |
| J | (10,14) | (10,14) | — |
| K | (8,11) | (12,15) | 4 |
| L | (10,15) | (10,15) | — |
| M | (14,20) | (14,20) | — |
| N | (15,20) | (15,20) | — |
| Fim | (20,20) | (20,20) | — |

(c) Duração = 20

* Se I atrasar 2 semanas a duração permanecerá a mesma pois esta atividade tem folga de 3 semanas.
* Se H atrasar 2 semanas a duração será de 21 semanas pois a folga de H é de 1 semana apenas.

(9)

(2) (a)




$$\mu = \frac{o + 4m + p}{6}$$

$$\sigma^2 = \left(\frac{p - o}{6}\right)^2$$

(b)

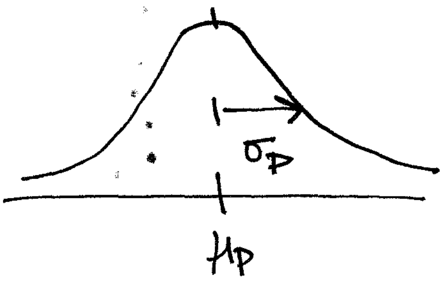
| Atividade | o | m | p | $\mu$ | $\sigma^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 3 | 4 | 5 | 4 | 0,11 |
| B | 2 | 2 | 2 | 2 | 0 |
| C | 3 | 5 | 6 | 4,8 | 0,25 |
| D | 1 | 3 | 5 | 3 | 0,44 |
| E | 2 | 3 | 5 | 3,2 | 0,25 |

(c)

| Caminho | Duração média |
|---|---|
| Ini → A → B → C → Fim | 10,8 caminho crítico médio |
| Ini → A → B → E → Fim | 9,2 |
| Ini → A → D → E → Fim | 10,2 |

$\mu_P = 10,8$

$\sigma_P^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_C^2 = 0,36$




(d)

$P(T \leqslant 11) \simeq 50\%$

(3) (a)

| Caminho | Duração |
|---|---|
| Ini → A → C → E → F → Fim | 51 ← Caminho crítico |
| Ini → B → D → Fim | 50 |

Duração = 51 dias

(b)

| Atividade | Tempo (dM) Normal | Tempo (dM) crash | Custo normal | Custo Crash | Estoque de redução | Custo/dia reduzido |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 12 | 9 | 210 | 270 | 3 | 20 |
| B | 23 | 18 | 420 | 460 | 5 | 9 |
| C | 15 | 12 | 290 | 320 | 3 | 10 |
| D | 27 | 21 | 440 | 500 | 6 | 10 |
| E | 18 | 14 | 350 | 410 | 4 | 15 |
| F | 6 | 4 | 160 | 210 | 2 | 25 |

| Atividade a Reduzir | Custo | Duração ACEF | Duração BD |
|---|---|---|---|
| | | 51 | 50 |
| C | 10 | 50 | 50 |
| B | 9 | ~~49~~ 50 | ~~4~~ 49 |
| C | 10 | 49 | 49 |
| B | 9 | 49 | 48 |
| C | 10 | 48 | 48 |
| B | 9 | 48 | 47 |
| E | 15 | 47 | 47 |
| | 72 | | |

Redução de 3 dias em C
3 dias em B
1 dia em E
ao custo de 72K extra

# Cap V

(1) (a) $FS_1 = \dfrac{\frac{23+19+21}{3}}{25} = \dfrac{21}{25} = 0{,}84$

$FS_2 = \dfrac{\frac{22+21+26}{3}}{25} = \dfrac{23}{25} = 0{,}92$

$FS_3 = \dfrac{\frac{31+27+32}{3}}{25} = 1{,}2$

$FS_4 = \dfrac{\frac{26+24+28}{3}}{25} = 1{,}04$

(b) $a3T4 = 28$

$a3T4 \text{ desazonalizado} = \dfrac{28}{1{,}04} = 26{,}9$

último valor : $a4T1 = 26{,}9 \times FS1$

$= 26{,}9 \times 0{,}84 = 22{,}6$

(c) $a4T2 = 26{,}9 \times 0{,}92 = 24{,}7$

$a4T3 = 26{,}9 \times 1{,}2 = 32{,}3$

$a4T4 = 26{,}9 \times 1{,}04 = 28{,}0$

Utilizamos aqui o último valor corrigido pelos fatores de sazonalidade de cada trimestre.

(2) (a) $F_6^{UV} = 13$

(b) $F_6^{M} = \dfrac{15+18+12+17+13}{5} = 15$

(c) $F_1^{AE} = 15$

$F_2^{AE} = 15 + 0{,}5 \times (18-15) = 16{,}5$

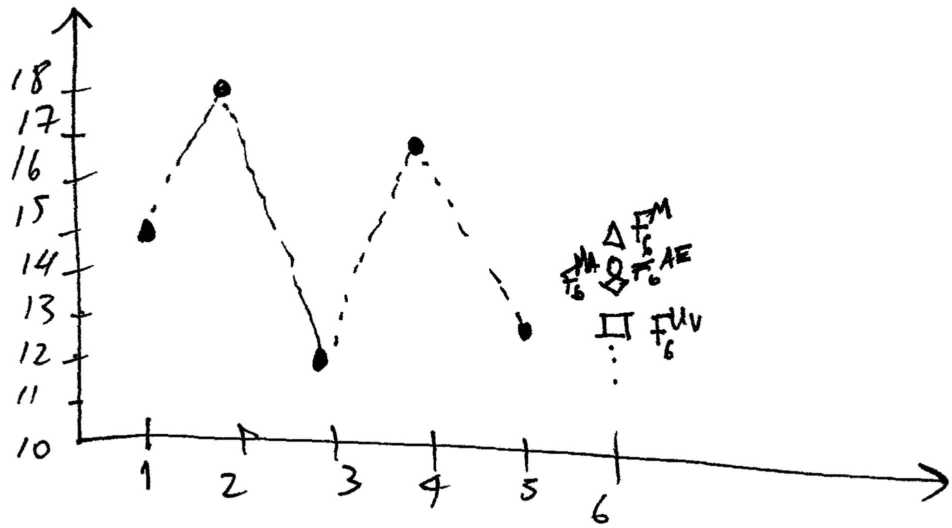
$F_3^{AE} = 16{,}5 + 0{,}5 \times (12-16{,}5) = 14{,}25$

$F_4^{AE} = 14{,}25 + 0{,}5 \times (17-14{,}25) = 15{,}62$

$F_5^{AE} = 15{,}62 + 0{,}5 \times (13-15{,}62) = 14{,}31$

(d) $F_{6,3}^{MA} = \dfrac{13+17+12}{3} = 14$

(e)




A série não aparenta tendência ou sazonalidade, sendo assim uma previsão em torno da média parece razoável. As várias técnicas indicam algo entre 14 e 15. ~~Uma possibilidade seria utilizarmos~~