
Uma Introdução a Teoria dos Jogos

Brígida Alexandre Sartini, Gilmar Garbugio, Humberto José Bortolossi
Polyane Alves Santos e Larissa Santana Barreto



II Bienal da SBM
Universidade Federal da Bahia
25 a 29 de outubro de 2004

SUMÁRIO

1	Descrição informal da teoria dos jogos	1
1.1	Introdução	1
1.2	História	2
1.3	O que é um jogo?	4
1.4	Soluções de um jogo	8
1.5	Estratégias mistas	12
1.6	Soluções em estratégias mistas	15
1.7	Existência de soluções	23
2	O teorema minimax de von Neumann	24
2.1	Jogos de soma constante com dois jogadores	24
2.2	Equilíbrio de Nash em estratégias puras	26
2.3	Equilíbrio de Nash em estratégias mistas	29
2.4	O teorema minimax de von Neumann	31
3	O teorema de equilíbrio de Nash	38
4	A forma extensa de um jogo	49
4.1	Representação de um jogo via alfabetos e árvores	49
4.2	Conversão entre as formas normal e extensa	58
	Bibliografia	61

Capítulo 1

Descrição informal da teoria dos jogos

1.1 Introdução

A *teoria dos jogos* é uma teoria matemática criada para se modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais “agentes de decisão” interagem entre si. Ela fornece a linguagem para a descrição de processos de decisão conscientes e objetivos envolvendo mais do que um indivíduo.

A *teoria dos jogos* é usada para se estudar assuntos tais como eleições, leilões, balança de poder, evolução genética, etc. Ela é também uma teoria matemática pura, que pode e tem sido estudada como tal, sem a necessidade de relacioná-la com problemas comportamentais ou jogos *per se*.

Algumas pessoas acreditam que a *teoria dos jogos* formará em algum dia o alicerce de um conhecimento técnico estrito de como decisões são feitas e de como a economia funciona. O desenvolvimento da teoria ainda não atingiu este patamar e, hoje, a *teoria dos jogos* é mais estudada em seus aspectos matemáticos puros e, em aplicações, ela é usada como uma ferramenta ou alegoria que auxiliam no entendimento de sistemas mais complicados.

Neste texto trataremos da *Teoria Econômica dos Jogos*, que não deve ser confundida com a *Teoria Combinatória dos Jogos* [4, 11, 5, 2, 6, 7], iniciada por Sprague [20] e Grundy na década de 30. Enquanto que a primeira tem motivações predominante econômicas e procura estabelecer métodos para se maximizar o ganho (*payoff*), a segunda se concentra nos aspectos combinatórios de jogos de mesa (por exemplo, ser o jogador a fazer o último

movimento em um jogo de *nim* [1]) e não permite “elementos imprevisíveis” como o lançamento de um dado ou o baralhamento de cartas.

1.2 História

Registros antigos sobre teoria dos jogos remontam ao século XVIII. Em correspondência dirigida a Nicolas Bernoulli, James Waldegrave analisa um jogo de cartas chamado “*le Her*” e fornece uma solução que é um equilíbrio de estratégia mista (conceito que nos familiarizaremos posteriormente). Contudo, Waldegrave não estendeu sua abordagem para uma teoria geral. No início do século XIX, temos o famoso trabalho de Augustin Cournot sobre duopólio [3]. Em 1913, Ernst Zermelo publicou o primeiro teorema matemático da teoria dos jogos [21], o teorema afirma que o jogo de xadrez é *estritamente determinado*, isto é, em cada estágio do jogo pelo menos um dos jogadores tem uma estratégia em mão que lhe dará a vitória ou conduzirá o jogo ao empate. Outro grande matemático que se interessou em jogos foi Emile Borel, que reinventou as soluções *minimax* e publicou quatro artigos sobre jogos estratégicos. Ele achava que a guerra e a economia podiam ser estudadas de uma maneira semelhante.



Figura 1.1: Ernst Zermelo.

Em seu início, a teoria dos jogos chamou pouca atenção. O grande matemático John von Neumann mudou esta situação. Em 1928, ele demonstrou que todo jogo finito de soma zero com duas pessoas possui uma solução em

estratégias mistas [18]. A demonstração original usava topologia e análise



Figura 1.2: John von Neumann.

funcional e era muito complicada de se acompanhar. Em 1937, ele forneceu uma nova demonstração baseada no teorema do ponto fixo de Brouwer. John von Neumann, que trabalhava em muitas áreas da ciência, mostrou interesse em economia e, junto com o economista Oscar Morgenstern, publicou o clássico “*The Theory of Games and Economic Behaviour*” [19] em 1944 e, com isto, a teoria dos jogos invadiu a economia e a matemática aplicada.



Figura 1.3: Oscar Morgenstern.

Em 1950, o matemático John Forbes Nash Júnior publicou quatro artigos importantes para a teoria dos jogos não-cooperativos e para a teoria de barganha. Em “*Equilibrium Points in n -Person Games*” [14] e “*Non-cooperative*

Games” [16], Nash provou a existência de um equilíbrio de estratégias mistas para jogos não-cooperativos, denominado *equilíbrio de Nash*, e sugeriu uma abordagem de estudo de jogos cooperativos a partir de sua redução para a forma não-cooperativa. Nos artigos “*The Bargaining Problem*” [15] e “*Two-Person Cooperative Games*” [17], ele criou a teoria de barganha e provou a existência de solução para o problema da barganha de Nash.

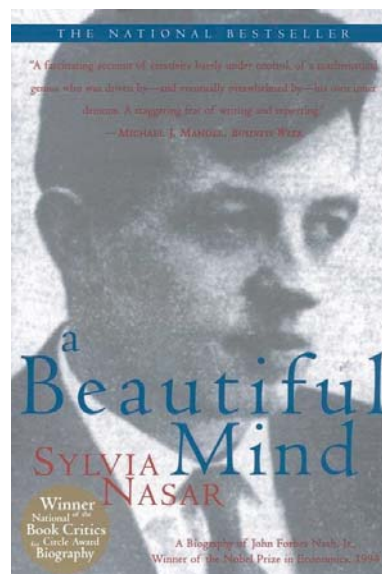


Figura 1.4: John Forbes Nash.

Em 1994, John Forbes Nash Jr. (Universidade de Princeton), John Harsanyi (Universidade de Berkeley, Califórnia) e Reinhard Selten (Universidade de Bonn, Alemanha) receberam o prêmio Nobel por suas contribuições para a Teoria dos Jogos.

1.3 O que é um jogo?

A teoria dos jogos pode ser definida como a teoria dos modelos matemáticos que estuda a escolha de decisões ótimas sob condições de conflito. O elemento básico em um jogo é o conjunto de *jogadores* que dele participam. Cada jogador tem um conjunto de *estratégias*. Quando cada jogador escolhe sua estratégia, temos então uma *situação* ou *perfil* no espaço de todas as situações (perfis) possíveis. Cada jogador tem interesse ou preferências para cada situação no jogo. Em termos matemáticos, cada jogador tem uma

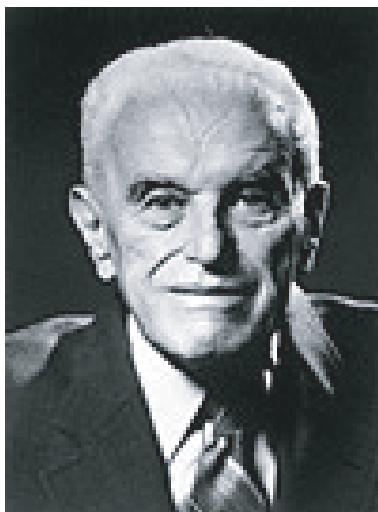


Figura 1.5: John Harsanyi.



Figura 1.6: Reinhard Selten.

função utilidade que atribui um número real (o ganho ou *payoff* do jogador) a cada situação do jogo.

Mais especificamente, um jogo tem os seguintes elementos básicos: existe um conjunto finito de jogadores, representado por $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Cada jogador $g_i \in G$ possui um conjunto finito $S_i = \{s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}\}$ de opções, denominadas *estratégias puras* do jogador g_i ($m_i \geq 2$). Um vetor $\mathbf{s} = (s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n})$, onde s_{ij_i} é uma estratégia pura para o jogador $g_i \in G$, é denominado um *perfil de estratégia pura*. O conjunto de todos os perfis de estratégia pura formam, portanto, o produto cartesiano

$$S = \prod_{i=1}^n S_i = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n,$$

denominado *espaço de estratégia pura* do jogo. Para jogador $g_i \in G$, existe uma função utilidade

$$\begin{aligned} u_i: S &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{s} &\mapsto u_i(\mathbf{s}) \end{aligned}$$

que associa o ganho (*payoff*) $u_i(\mathbf{s})$ do jogador g_i a cada perfil de estratégia pura $\mathbf{s} \in S$.

Exemplo 1.1 (O DILEMA DO PRISIONEIRO) Possivelmente o exemplo mais conhecido na teoria dos jogos é o *dilema do prisioneiro*. Ele foi formulado por Albert W. Tucker em 1950, em um seminário para psicólogos na Universidade de Stanford, para ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

A situação é a seguinte: dois ladrões, Al e Bob, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em selas separadas e sem poderem se comunicar entre si, o delegado de plantão faz seguinte proposta: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, ambos serão submetidos a uma pena de 1 ano. Se os dois confessarem, então ambos terão pena de 5 anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou será libertado e o outro será condenado a 10 anos de prisão. Neste contexto, temos

$$\begin{aligned} G &= \{\text{Al}, \text{Bob}\}, \quad S_{\text{Al}} = \{\text{confessar}, \text{negar}\}, \quad S_{\text{Bob}} = \{\text{confessar}, \text{negar}\}, \\ S &= \{(\text{confessar}, \text{confessar}), (\text{confessar}, \text{negar}), (\text{negar}, \text{confessar}), (\text{negar}, \text{negar})\}. \end{aligned}$$

As duas funções utilidade

$$u_{\text{Al}}: S \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u_{\text{Bob}}: S \rightarrow \mathbb{R}$$

são dadas por

$$\begin{aligned} u_{\text{Al}}(\text{confessar}, \text{confessar}) &= -5, & u_{\text{Al}}(\text{confessar}, \text{negar}) &= 0, \\ u_{\text{Al}}(\text{negar}, \text{confessar}) &= -10, & u_{\text{Al}}(\text{negar}, \text{negar}) &= -1, \end{aligned}$$

(que representam os ganhos (*payoffs*) de Al) e

$$\begin{aligned} u_{\text{Bob}}(\text{confessar}, \text{confessar}) &= -5, & u_{\text{Bob}}(\text{confessar}, \text{negar}) &= -10, \\ u_{\text{Bob}}(\text{negar}, \text{confessar}) &= 0, & u_{\text{Bob}}(\text{negar}, \text{negar}) &= -1 \end{aligned}$$

(que representam os ganhos (*payoffs*) de Bob). É uma prática se representar os *payoffs* dos jogadores através de uma matriz, denominada *matriz de payoffs*.

		Bob	
		confessar	negar
Al	confessar	(-5, -5)	(0, -10)
	negar	(-10, 0)	(-1, -1)

Nesta matriz, os números de cada célula representam, respectivamente, os *payoffs* de Al e Bob para as escolhas de Al e Bob correspondentes a célula.

■

Exemplo 1.2 (A BATALHA DOS SEXOS) Um homem e a sua mulher desejam sair para passear. O homem prefere assistir a um jogo de futebol enquanto que sua mulher prefere ir ao cinema. Se eles forem juntos para o futebol, então o homem tem satisfação maior do que a mulher. Por outro lado, se eles forem juntos ao cinema, então a mulher tem satisfação maior do que o homem. Finalmente, se eles saírem sozinhos, então ambos ficam igualmente insatisfeitos. Esta situação também pode ser modelada como um jogo estratégico. Temos:

$$\begin{aligned} G &= \{\text{homem}, \text{mulher}\}, & S_{\text{homem}} &= \{\text{futebol}, \text{cinema}\}, & S_{\text{mulher}} &= \{\text{futebol}, \text{cinema}\}, \\ S &= \{(\text{futebol}, \text{futebol}), (\text{futebol}, \text{cinema}), (\text{cinema}, \text{futebol}), (\text{cinema}, \text{cinema})\}. \end{aligned}$$

As duas funções utilidade $u_{\text{homem}}: S \rightarrow \mathbb{R}$ e $u_{\text{mulher}}: S \rightarrow \mathbb{R}$ são descritas pela seguinte matriz de *payoffs*:

		Mulher	
		futebol	cinema
Homem	futebol	(10, 5)	(0, 0)
	cinema	(0, 0)	(5, 10)

■

1.4 Soluções de um jogo

Uma solução de um jogo é uma prescrição ou previsão sobre o resultado do jogo. Existem vários conceitos diferentes de solução. Nesta seção, investigaremos os dois conceitos mais comuns: *dominância* e *equilíbrio de Nash*.

Considere o dilema do prisioneiro. Como encontrar uma solução para o dilema de Bob e Al, isto é, que estratégias são plausíveis se os dois prisioneiros querem minimizar¹ o tempo de cadeia? Se analisarmos o jogo do ponto de vista de Al, ele pode raciocinar da seguinte maneira:

“Duas coisas podem acontecer: Bob pode confessar ou Bob pode negar. Se Bob confessar, então é melhor para mim confessar também. Se Bob não confessar, então eu fico livre se eu confessar. Em qualquer um dos casos, é melhor para mim confessar. Então, eu confessarei.”

Se analisarmos agora o jogo do ponto de vista de Bob, podemos aplicar a mesma linha de raciocínio e concluir que Bob também irá confessar. Assim, ambos confessarão e ficarão presos por 5 anos.

Em termos da teoria dos jogos, dizemos que os dois jogadores possuem uma *estratégia dominante*, isto é, todas menos uma estratégia é *estritamente dominada*, que o jogo é resolúvel por *dominância estrita iterada* e que o jogo termina em uma solução que é um *equilíbrio de estratégia dominante*, conceitos que definiremos a seguir.

¹No exemplo 1.1, os *payoffs* foram definidos como números ≤ 0 . Desta maneira, minimizar o tempo de cadeia é equivalente a maximizar o *payoff*.

Dominância

Freqüentemente, iremos discutir perfis de estratégia na qual apenas a estratégia de um único jogador $g_i \in G$ irá variar, enquanto que as estratégias de seus oponentes permanecerão fixas. Denote por

$$\mathbf{s}_{-i} = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}) \in S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$$

uma escolha de estratégia para todos os jogadores, menos o jogador g_i . Desta maneira, um perfil de estratégia pode ser convenientemente denotado por

$$\mathbf{s} = (s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}) = (s_{1j_1}, \dots, s_{(i-1)j_{i-1}}, s_{ij_i}, s_{(i+1)j_{i+1}}, \dots, s_{nj_n}).$$

Definição 1.1 (ESTRATÉGIA PURA ESTRITAMENTE DOMINADA)

Uma estratégia pura $s_{ik} \in S_i$ do jogador $g_i \in G$ é *estritamente dominada* pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se

$$u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) > u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i}),$$

para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$. A estratégia $s_{ik} \in S_i$ é *fracamente dominada* pela estratégia $s_{ik'} \in S_i$ se $u_i(s_{ik'}, \mathbf{s}_{-i}) \geq u_i(s_{ik}, \mathbf{s}_{-i})$, para todo $\mathbf{s}_{-i} \in S_{-i}$.

Dominância estrita iterada nada mais é do que um processo onde se eliminam as estratégias que são estritamente dominadas.

Exemplo 1.3 Considere o jogo determinado pela matriz de *payoffs* abaixo.

		g_2			
		s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{11}	(5, 2)	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(0, 0)	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(7, 0)	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(9, 5)	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Neste jogo, para o jogador g_2 , a estratégia s_{21} é estritamente dominada pela estratégia s_{24} , assim, a primeira coluna da matriz pode ser eliminada.

		g_2		
		s_{22}	s_{23}	s_{24}
g_1	s_{11}	(2, 6)	(1, 4)	(0, 4)
	s_{12}	(3, 2)	(2, 1)	(1, 1)
	s_{13}	(2, 2)	(1, 1)	(5, 1)
	s_{14}	(1, 3)	(0, 2)	(4, 8)

Agora, nesta matriz reduzida, para o jogador g_1 , as estratégias s_{11} e s_{14} são estritamente dominadas pelas estratégias s_{12} e s_{13} , respectivamente. Portanto, as linhas 1 e 4 podem ser eliminadas. Além disso, a estratégia s_{23} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} . Assim, a coluna 2 também pode ser eliminada. Obtemos então uma matriz reduzida 2×2 .

		g_2	
		s_{22}	s_{24}
g_1	s_{12}	(3, 2)	(1, 1)
	s_{13}	(2, 2)	(5, 1)

Finalmente, a estratégia s_{24} do jogador g_2 é estritamente dominada pela estratégia s_{22} e, na matriz 2×1 resultante, a estratégia s_{13} do jogador g_1 é estritamente dominada pela estratégia s_{12} . Vemos então que o resultado do jogo é (3, 2), isto é, o jogador g_1 escolhe a estratégia s_{12} e o jogador g_2 escolhe a estratégia s_{22} . ■

No exemplo acima, a técnica de dominância estrita iterada forneceu um único perfil de estratégia como solução do jogo, no caso, o perfil

$$(s_{12}, s_{22}).$$

Contudo, pode acontecer da técnica fornecer vários perfis ou, até mesmo, fornecer todo o espaço de estratégia, como é o caso da batalha dos sexos, onde não existem estratégias estritamente dominadas.

Solução estratégica ou equilíbrio de Nash

Uma *solução estratégica* ou *equilíbrio de Nash* de um jogo é um ponto onde cada jogador não tem incentivo de mudar sua estratégia se os demais jogadores não o fizerem.

Definição 1.2 (EQUILÍBRIO DE NASH) Dizemos que um perfil de estratégia

$$\mathbf{s}^* = (s_1^*, \dots, s_{(i-1)}^*, s_i^*, s_{(i+1)}^*, \dots, s_n^*) \in S$$

é um *equilíbrio de Nash* se

$$u_i(s_i^*, \mathbf{s}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij_i}, \mathbf{s}_{-i}^*)$$

para todo $i = 1, \dots, n$ e para todo $j_i = 1, \dots, m_i$, com $m_i \geq 2$.

Exemplo 1.4

- (a) No dilema do prisioneiro (exemplo 1.1), o perfil de estratégia (confessar, confessar) é um equilíbrio de Nash. De fato: se um prisioneiro confessar e o outro não, aquele que não confessou fica preso na cadeia 10 anos, ao invés de 5 anos, se tivesse confessado. Além desse perfil, não existem outros equilíbrios de Nash.
- (b) Na batalha dos sexos (exemplo 1.2), os perfis de estratégia (futebol, futebol) e (cinema, cinema) são os únicos equilíbrios de Nash do jogo.
- (c) No exemplo 1.3, o único equilíbrio de Nash do jogo é o perfil de estratégia (s_{12}, s_{22}) .
- (d) Existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Este é o caso do jogo de combinar moedas (*matching pennies*). Nesse jogo, dois jogadores exibem, ao mesmo tempo, a moeda que cada um esconde em sua mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o segundo jogador dá sua moeda para o primeiro. Se uma das moedas

apresenta cara, enquanto a outra apresenta coroa, é a vez do primeiro jogador dar sua moeda pra o segundo. Esse jogo se encontra representado por sua matriz de *payoffs* dada abaixo.

		g_2	
		s_{21}	s_{22}
g_1	s_{11}	(+1, -1)	(-1, +1)
	s_{12}	(-1, +1)	(+1, -1)

1.5 Estratégias mistas

Como vimos no jogo de combinar de moedas do exemplo 1.4 (d) acima, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras. Uma alternativa para estes casos é a de considerar o jogo do ponto de vista probabilístico, isto é, ao invés de escolher um perfil de estratégia pura, o jogador deve escolher uma *distribuição de probabilidade* sobre suas estratégias puras.

Uma *estratégia mista* \mathbf{p}_i para o jogador $g_i \in G$ é uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto S_i de estratégias puras do jogador, isto é, \mathbf{p}_i é um elemento do conjunto

$$\Delta_{m_i} = \left\{ (x_1, \dots, x_{m_i}) \in \mathbb{R}^{m_i} \mid x_1 \geq 0, \dots, x_{m_i} \geq 0 \text{ e } \sum_{k=1}^{m_i} x_k = 1 \right\}.$$

Assim, se $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$, então

$$p_{i1} \geq 0, \quad p_{i2} \geq 0, \quad \dots, \quad p_{im_i} \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1.$$

Note que cada Δ_{m_i} é um conjunto compacto e convexo. Nas figuras 1.7 e 1.8 temos os desenhos de Δ_2 e Δ_3 , respectivamente. Os pontos extremos (vértices) de Δ_{m_i} , isto é, os pontos da forma

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_{m_i} = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

dão, respectivamente, probabilidade 1 às estratégias puras $s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{im_i}$. Desta maneira, podemos considerar a distribuição de probabilidade \mathbf{e}_k como a estratégia mista que representa a estratégia pura s_{ik} do jogador g_i .

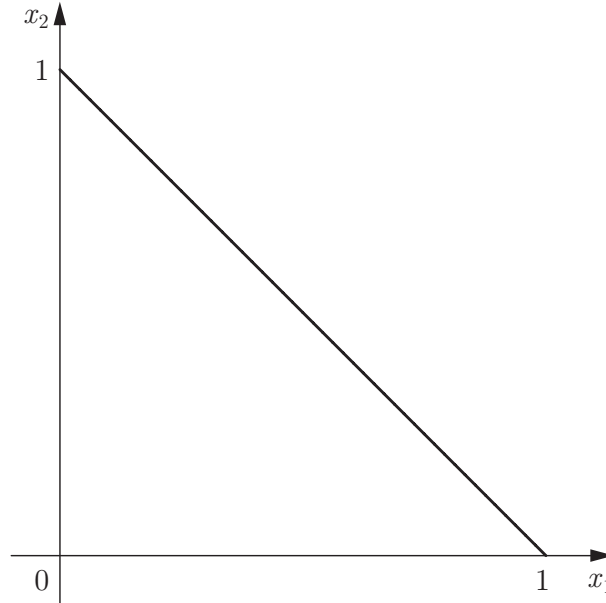


Figura 1.7: $\Delta_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \text{ e } x_1 + x_2 = 1\}$.

O espaço de todos os perfis de estratégia mista é o produto cartesiano

$$\Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n},$$

denominado *espaço de estratégia mista*. Um vetor $\mathbf{p} \in \Delta$ é denominado um *perfil de estratégia mista*. Como no caso de estratégias puras, usaremos a notação \mathbf{p}_{-i} para representar as estratégias de todos os jogadores, com exceção do jogador g_i .

Como o produto cartesiano de conjuntos compactos e convexos é compacto e convexo, vemos que Δ é compacto e convexo.

Cada perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) \in \Delta$ determina um *payoff* esperado, uma média dos *payoffs* ponderada pelas distribuições de probabilidades $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. Mais precisamente, se

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) \\ &= (\underbrace{p_{11}, p_{12}, \dots, p_{1m_1}}_{\mathbf{p}_1}; \underbrace{p_{21}, p_{22}, \dots, p_{2m_2}}_{\mathbf{p}_2}; \dots; \underbrace{p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nm_n}}_{\mathbf{p}_n}), \end{aligned}$$

então

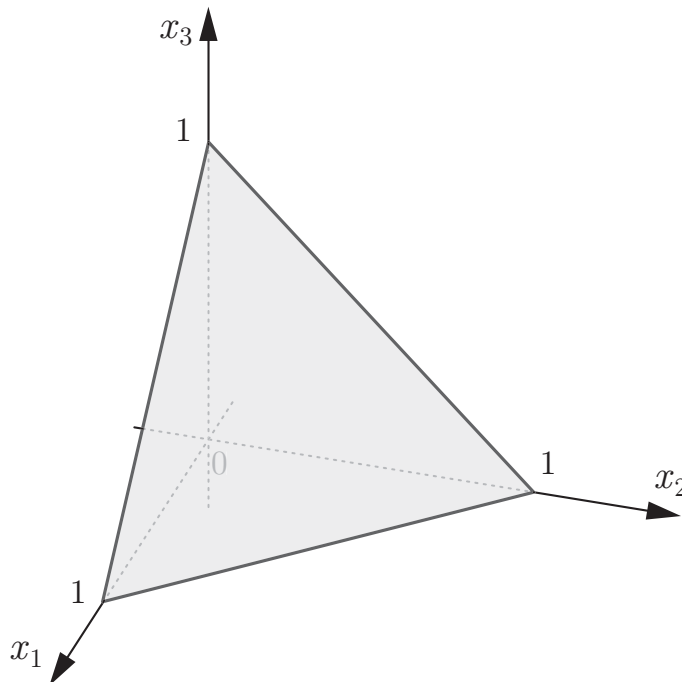


Figura 1.8: $\Delta_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \text{ e } x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$.

$$u_i(\mathbf{p}) = \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \cdots \sum_{j_n=1}^{m_n} \left(\prod_{k=1}^n p_{kj_k} u_i(s_{1j_1}, s_{2j_2}, \dots, s_{nj_n}) \right).$$

Assim, no item (d) do exemplo 1.4, se g_1 escolhe a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}_1 = (1/4, 3/4)$ e g_2 escolhe a distribuição de probabilidade $\mathbf{p}_2 = (1/3, 2/3)$, então os *payoffs* esperados associados ao perfil de estratégia mista $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = (1/4, 3/4; 1/3, 2/3)$ são dados por

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{p}) &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \left(\prod_{k=1}^2 p_{kj_k} u_1(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \right) \\ &= p_{11} \left(p_{21} u_1(s_{11}, s_{21}) + p_{22} u_1(s_{11}, s_{22}) \right) + \\ &\quad p_{12} \left(p_{21} u_1(s_{12}, s_{21}) + p_{22} u_1(s_{12}, s_{22}) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (+1) + \frac{2}{3} (-1) \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} (-1) + \frac{2}{3} (+1) \right) = +\frac{1}{6} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
 u_2(\mathbf{p}) &= \sum_{j_1=1}^2 \sum_{j_2=1}^2 \left(\prod_{k=1}^2 p_{kj_k} u_2(s_{1j_1}, s_{2j_2}) \right) \\
 &= p_{11} \left(p_{21} u_2(s_{11}, s_{21}) + p_{22} u_2(s_{11}, s_{22}) \right) + \\
 &= p_{12} \left(p_{21} u_2(s_{12}, s_{21}) + p_{22} u_2(s_{12}, s_{22}) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} (-1) + \frac{2}{3} (+1) \right) + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3} (+1) + \frac{2}{3} (-1) \right) = -\frac{1}{6}.
 \end{aligned}$$

1.6 Soluções em estratégias mistas

Todos os critérios básicos para soluções de jogos em estratégias puras podem ser estendidos para estratégias mistas.

Dominância estrita iterada

Definição 1.3 (DOMINÂNCIA ESTRITA ITERADA) Sejam $S_i^{(0)} = S_i$ e $\Delta_{m_i}^{(0)} = \Delta_{m_i}$. Defina, recursivamente,

$$S_i^{(n)} = \{s \in S_i^{(n-1)} \mid \nexists \mathbf{p} \in \Delta_{m_i}^{(n-1)} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(n-1)}, u_i(\mathbf{p}, s_{-i}) > u_i(s, s_{-i})\}$$

e

$$\Delta_{m_i}^{(n)} = \{\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{m_i}) \in \Delta_{m_i} \mid \forall k = 1, \dots, m_i, p_k > 0 \text{ somente se } s_{ik} \in S_i^{(n)}\},$$

onde, por abuso de notação, $u_i(\mathbf{p}, s_{-i})$ representa o *payoff* esperado quando o jogador g_i escolhe a estratégia mista \mathbf{p} e os demais jogadores escolhem as estratégias mistas correspondentes as estratégias puras dadas por s_{-i} . A interseção

$$S_i^\infty = \bigcap_{n=0}^{\infty} S_i^{(n)}$$

é o conjunto de estratégias puras e

$$\Delta_{m_i}^\infty = \{ \mathbf{p} \in \Delta_{m_i} \mid \nexists \mathbf{p}' \in \Delta_{m_i} \text{ tal que } \forall s_{-i} \in S_{-i}^{(\infty)}, u_i(\mathbf{p}', s_{-i}) > u_i(\mathbf{p}, s_{-i}) \}$$

é o conjunto de todas as estratégias mistas do jogador g_i que sobreviveram a técnica de *dominância estrita iterada*.

Equilíbrio de Nash

Definição 1.4 (EQUILÍBRIO DE NASH) Dizemos que um perfil de estratégia mista

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n}$$

é um *equilíbrio de Nash* se

$$u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq u_i(\mathbf{p}, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_{m_i}$, isto é, nenhum jogador sente motivação de trocar sua estratégia mista se os demais jogadores não o fizerem.

Exemplo 1.5

(a) No dilema do prisioneiro (exemplo 1.1), o perfil de estratégia mista

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*) = (1, 0; 1, 0)$$

é um equilíbrio de Nash, pois

$$u_1(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2^*) = u_1(p, 1-p; 1, 0) = 5p - 10 \leq -5 = u_1(1, 0; 1, 0) = u_1(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo $\mathbf{p} = (p, 1-p) \in \Delta_2$ e

$$u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{q}) = u_2(1, 0; q, 1-q) = 5q - 10 \leq -5 = u_2(1, 0; 1, 0) = u_2(\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$$

para todo $\mathbf{q} = (q, 1-q) \in \Delta_2$. Observe que este equilíbrio corresponde ao equilíbrio em estratégias puras $\mathbf{s}^* = (\text{confessar}, \text{confessar})$. Mostraremos mais adiante que este é o *único* equilíbrio de Nash em estratégias mistas do jogo.

- (b) Na batalha dos sexos (exemplo 1.2), os equilíbrios de Nash em estratégias mistas são

$$(1, 0; 1, 0) \quad \text{e} \quad (0, 1; 0, 1),$$

correspondentes aos equilíbrios de Nash em estratégias puras (futebol, futebol) e (cinema, cinema), respectivamente, é o ponto

$$(2/3, 1/3; 1/3, 2/3).$$

Mostraremos mais adiante que estes são os *únicos* equilíbrios de Nash em estratégias mistas do jogo.

- (c) No exemplo 1.3, o único equilíbrio de Nash em estratégia mista é o ponto

$$(0, 1, 0, 0; 0, 1, 0, 0)$$

que corresponde ao equilíbrio de Nash (s_{12}, s_{22}) em estratégias puras.

- (d) No jogo de combinar de moedas do exemplo 1.4 (d), o único equilíbrio de Nash em estratégias mistas é o ponto

$$(1/2, 1/2; 1/2, 1/2).$$

■

Exemplo 1.6 O chefe de uma empresa de computação desconfia que seu operador de computadores está usando o tempo de serviço para “bater papo” na internet. Se o operador trabalha corretamente, ele gasta g em esforço e produz um lucro bruto de v unidades. O chefe, por sua vez, pode fiscalizar ou não o trabalho do operador. Fiscalizar custa h unidades para a empresa. Se o operador for pego “batendo papo” na internet, ele perde o seu salário de w unidades. Para limitar o número de casos a considerar, vamos assumir que $v > w > g > h > 0$. Os dois jogadores escolhem suas estratégias simultaneamente.

		empregado	
		não trabalhar	trabalhar
chefe	fiscalizar	$(-h, 0)$	$(v - w - h, w - g)$
	não fiscalizar	$(-w, w)$	$(v - w, w - g)$

Observe que este jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias puras e, como ele deve se repetir em cada dia útil de trabalho, não é sensato escolher *sempre* a mesma estratégia pura para todos os dias. A solução, neste caso, é escolher entre as estratégias puras a cada dia seguindo uma distribuição de probabilidades. De fato, se $v = 5$, $w = 4$, $g = 3$ e $h = 2$, então o ponto

$$(3/4, 1/4; 1/2, 1/2)$$

é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Isto significa que o chefe deve escolher sua estratégia de acordo com um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade $(3/4, 1/4)$ e o operador deve escolher sua estratégia de acordo com um gerador de números aleatórios com distribuição de probabilidade $(1/2, 1/2)$. Isto pode ser feito, por exemplo, com as duas “rodas da fortuna” da figura 1.9. ■

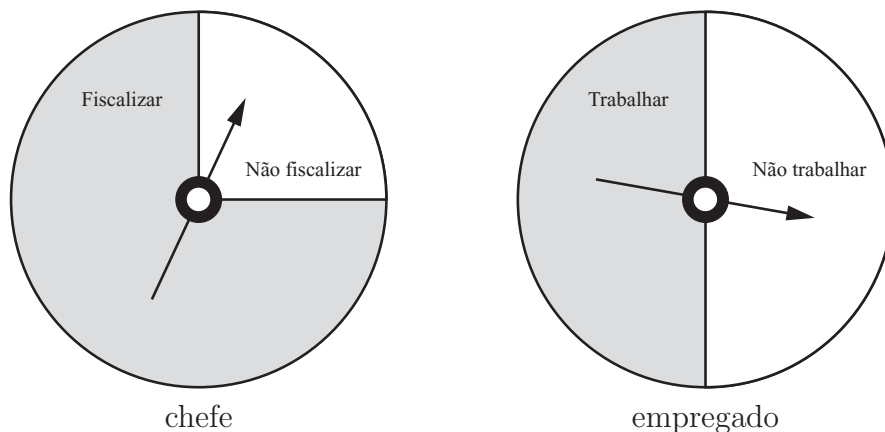


Figura 1.9: Distribuições de probabilidade que constituem um equilíbrio de Nash para o jogo do exemplo 1.6.

Exemplo 1.7 (A TRAGÉDIA DOS COMUNS) Considere uma vila, onde cada um dos n fazendeiros tem a opção de manter ou não sua ovelha no pasto. A

utilidade do leite e da lã de uma ovelha pastando é igual a 1, por outro lado, esta ovelha no pasto contribui com um dano ambiental (compartilhado por todos os fazendeiros) de 5 unidades.

Cada fazendeiro tem duas estratégias: manter ou não manter sua ovelha no pasto. Defina

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{se o } i\text{-ésimo fazendeiro mantém sua ovelha no pasto,} \\ 0, & \text{se o } i\text{-ésimo fazendeiro não mantém sua ovelha no pasto.} \end{cases}$$

Em termos destas variáveis, é fácil de ver que a utilidade u_i do i -ésimo fazendeiro é dada por

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = x_i - 5 \cdot \frac{(x_1 + \dots + x_n)}{n}.$$

Se $n > 5$, manter todas as ovelhas no pasto, isto é, tomar $x_1 = \dots = x_n = 1$, é o único equilíbrio de Nash do jogo. De fato: se todas as ovelhas estão no pasto e um fazendeiro resolve tirar sua ovelha, ele deixa de ganhar 1 (proveniente da utilidade da lã e do leite) e deixa de perder $5/n < 1$ (proveniente do dano ambiental), isto é, ele acaba ganhando menos do que se tivesse mantido sua ovelha no pasto. Assim, todos terminarão mantendo sua ovelha e a utilidade final de cada fazendeiro será igual -4 , com prejuízo ambiental máximo. A figura 1.10 lista todos os perfis de estratégia pura, com as respectivas utilidades, para o caso $n = 6$.

Para amenizar esta situação, a teoria dos jogos sugere a cobrança de um imposto por danos ambientais. Se o i -ésimo fazendeiro deve pagar um imposto de t unidades por manter sua ovelha no pasto, então sua utilidade final será dada por

$$u_i(x_1, \dots, x_n) = x_i - tx_i - 5 \cdot \frac{(x_1 + \dots + x_n)}{n}.$$

Se $t = 5$, então $x_1 = \dots = x_n = 0$ é o único equilíbrio de Nash, isto é, todos os fazendeiros vão preferir retirar suas ovelhas do pasto (figura 1.11).

O caso $n = 6$ e $t = 1/6$ é interessante: todos os 64 perfis de estratégia são equilíbrios de Nash (figura 1.12). ■

perfil	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0	0	0	0	0	0
(0, 0, 0, 0, 0, 1)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	1/6
(0, 0, 0, 0, 1, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	1/6	-5/6
(0, 0, 0, 0, 1, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3	-2/3
(0, 0, 0, 1, 0, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	1/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 0, 1, 0, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3	-2/3
(0, 0, 0, 1, 1, 0)	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3	-2/3	-5/3
(0, 0, 0, 1, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2	-3/2
(0, 0, 1, 0, 0, 0)	-5/6	-5/6	1/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 1, 0, 0, 1)	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3	-2/3
(0, 0, 1, 0, 1, 0)	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3	-2/3	-5/3
(0, 0, 1, 0, 1, 1)	-5/2	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2	-3/2
(0, 0, 1, 1, 0, 0)	-5/3	-5/3	-2/3	-2/3	-5/3	-5/3
(0, 0, 1, 1, 0, 1)	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2	-3/2
(0, 0, 1, 1, 1, 0)	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2	-3/2	-5/2
(0, 0, 1, 1, 1, 1)	-10/3	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3	-7/3
(0, 1, 0, 0, 0, 0)	-5/6	1/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 1, 0, 0, 0, 1)	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3
(0, 1, 0, 0, 1, 0)	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3
(0, 1, 0, 0, 1, 1)	-5/2	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2
(0, 1, 0, 1, 0, 0)	-5/3	-2/3	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3
(0, 1, 0, 1, 0, 1)	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2
(0, 1, 0, 1, 1, 0)	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2
(0, 1, 0, 1, 1, 1)	-10/3	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3
(0, 1, 1, 0, 0, 0)	-5/3	-2/3	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3
(0, 1, 1, 0, 0, 1)	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2
(0, 1, 1, 0, 1, 0)	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2
(0, 1, 1, 0, 1, 1)	-10/3	-7/3	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3
(0, 1, 1, 1, 0, 0)	-5/2	-3/2	-3/2	-3/2	-5/2	-5/2
(0, 1, 1, 1, 0, 1)	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3	-10/3	-7/3
(0, 1, 1, 1, 1, 0)	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3	-7/3	-10/3
(0, 1, 1, 1, 1, 1)	-25/6	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6
(1, 0, 0, 0, 0, 0)	1/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(1, 0, 0, 0, 0, 1)	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3
(1, 0, 0, 0, 1, 0)	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3
(1, 0, 0, 0, 1, 1)	-3/2	-5/2	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2
(1, 0, 0, 1, 0, 0)	-2/3	-5/3	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3
(1, 0, 0, 1, 0, 1)	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2
(1, 0, 0, 1, 1, 0)	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2
(1, 0, 0, 1, 1, 1)	-7/3	-10/3	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3
(1, 0, 1, 0, 0, 0)	-2/3	-5/3	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3
(1, 0, 1, 0, 0, 1)	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2
(1, 0, 1, 0, 1, 0)	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2
(1, 0, 1, 0, 1, 1)	-7/3	-10/3	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3
(1, 0, 1, 1, 0, 0)	-3/2	-5/2	-3/2	-3/2	-5/2	-5/2
(1, 0, 1, 1, 0, 1)	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3	-10/3	-7/3
(1, 0, 1, 1, 1, 0)	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3	-7/3	-10/3
(1, 0, 1, 1, 1, 1)	-19/6	-25/6	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6
(1, 1, 0, 0, 0, 0)	-2/3	-2/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3
(1, 1, 0, 0, 0, 1)	-3/2	-3/2	-5/2	-5/2	-5/2	-3/2
(1, 1, 0, 0, 1, 0)	-3/2	-3/2	-5/2	-5/2	-3/2	-5/2
(1, 1, 0, 0, 1, 1)	-7/3	-7/3	-10/3	-10/3	-7/3	-7/3
(1, 1, 0, 1, 0, 0)	-3/2	-3/2	-5/2	-3/2	-5/2	-5/2
(1, 1, 0, 1, 0, 1)	-7/3	-7/3	-10/3	-7/3	-10/3	-7/3
(1, 1, 0, 1, 1, 0)	-7/3	-7/3	-10/3	-7/3	-7/3	-10/3
(1, 1, 0, 1, 1, 1)	-19/6	-19/6	-25/6	-19/6	-19/6	-19/6
(1, 1, 1, 0, 0, 0)	-7/3	-7/3	-7/3	-7/3	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 0, 1)	-19/6	-19/6	-19/6	-25/6	-19/6	-19/6
(1, 1, 1, 0, 1, 0)	-7/3	-7/3	-7/3	-7/3	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 1, 1)	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-25/6	-19/6
(1, 1, 1, 1, 0, 0)	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-25/6	-19/6
(1, 1, 1, 1, 0, 1)	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-25/6
(1, 1, 1, 1, 1, 0)	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-19/6	-25/6
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	-4	-4	-4	-4	-4	-4

Figura 1.10: A tragédia dos comuns com $n = 6$ e imposto $t = 0$.

perfil	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0	0	0	0	0	0
(0, 0, 0, 0, 0, 1)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-29/6
(0, 0, 0, 0, 1, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 0, 0, 1, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3	-17/3
(0, 0, 0, 1, 0, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	-29/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 0, 1, 0, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3	-17/3
(0, 0, 0, 1, 1, 0)	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3	-17/3	-5/3
(0, 0, 0, 1, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2	-13/2
(0, 0, 1, 0, 0, 0)	-5/6	-5/6	-29/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 1, 0, 0, 1)	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3	-17/3
(0, 0, 1, 0, 1, 0)	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3	-17/3	-5/3
(0, 0, 1, 0, 1, 1)	-5/2	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2	-13/2
(0, 0, 1, 1, 0, 0)	-5/3	-5/3	-17/3	-17/3	-5/3	-5/3
(0, 0, 1, 1, 0, 1)	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-13/2
(0, 0, 1, 1, 1, 0)	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2	-13/2	-5/2
(0, 0, 1, 1, 1, 1)	-10/3	-10/3	-22/3	-22/3	-22/3	-22/3
(0, 1, 0, 0, 0, 0)	-5/6	-29/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 1, 0, 0, 0, 1)	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3
(0, 1, 0, 0, 1, 0)	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3
(0, 1, 0, 0, 1, 1)	-5/2	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2
(0, 1, 0, 1, 0, 0)	-5/3	-17/3	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3
(0, 1, 0, 1, 0, 1)	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2
(0, 1, 0, 1, 1, 0)	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2
(0, 1, 0, 1, 1, 1)	-10/3	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3	-22/3
(0, 1, 1, 0, 0, 0)	-5/3	-17/3	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3
(0, 1, 1, 0, 0, 1)	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2
(0, 1, 1, 0, 1, 0)	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2
(0, 1, 1, 0, 1, 1)	-10/3	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3
(0, 1, 1, 1, 0, 0)	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2	-5/2
(0, 1, 1, 1, 0, 1)	-10/3	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3
(0, 1, 1, 1, 1, 0)	-10/3	-22/3	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3
(0, 1, 1, 1, 1, 1)	-25/6	-49/6	-49/6	-49/6	-49/6	-49/6
(1, 0, 0, 0, 0, 0)	-29/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(1, 0, 0, 0, 0, 1)	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3
(1, 0, 0, 0, 1, 0)	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3
(1, 0, 0, 0, 1, 1)	-13/2	-5/2	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2
(1, 0, 0, 1, 0, 0)	-17/3	-5/3	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3
(1, 0, 0, 1, 0, 1)	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2
(1, 0, 0, 1, 1, 0)	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2
(1, 0, 0, 1, 1, 1)	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2
(1, 0, 1, 0, 0, 0)	-17/3	-5/3	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3
(1, 0, 1, 0, 0, 1)	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2
(1, 0, 1, 0, 1, 0)	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2
(1, 0, 1, 0, 1, 1)	-22/3	-10/3	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3
(1, 0, 1, 1, 0, 0)	-13/2	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2
(1, 0, 1, 1, 0, 1)	-13/2	-5/2	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2
(1, 0, 1, 1, 1, 0)	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3
(1, 0, 1, 1, 1, 1)	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3
(1, 1, 0, 0, 0, 0)	-17/3	-17/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3
(1, 1, 0, 0, 0, 1)	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2	-5/2	-13/2
(1, 1, 0, 0, 1, 0)	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2	-13/2	-5/2
(1, 1, 0, 0, 1, 1)	-22/3	-22/3	-10/3	-10/3	-22/3	-22/3
(1, 1, 0, 1, 0, 0)	-13/2	-13/2	-5/2	-13/2	-5/2	-5/2
(1, 1, 0, 1, 0, 1)	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3	-10/3	-22/3
(1, 1, 0, 1, 1, 0)	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3	-22/3	-10/3
(1, 1, 0, 1, 1, 1)	-49/6	-49/6	-25/6	-49/6	-49/6	-49/6
(1, 1, 1, 0, 0, 0)	-13/2	-13/2	-13/2	-5/2	-5/2	-5/2
(1, 1, 1, 0, 0, 1)	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3	-10/3	-22/3
(1, 1, 1, 0, 1, 0)	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3	-22/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 1, 1)	-49/6	-49/6	-49/6	-25/6	-49/6	-49/6
(1, 1, 1, 1, 0, 0)	-22/3	-22/3	-22/3	-22/3	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 1, 0, 1)	-49/6	-49/6	-49/6	-49/6	-25/6	-49/6
(1, 1, 1, 1, 1, 0)	-49/6	-49/6	-49/6	-49/6	-49/6	-25/6
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	-9	-9	-9	-9	-9	-9

Figura 1.11: A tragédia dos comuns com $n = 6$ e imposto $t = 5$.

perfil	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
(0, 0, 0, 0, 0, 0)	0	0	0	0	0	0
(0, 0, 0, 0, 0, 1)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	0
(0, 0, 0, 0, 1, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	0	-5/6
(0, 0, 0, 0, 1, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6	-5/6
(0, 0, 0, 1, 0, 0)	-5/6	-5/6	-5/6	0	-5/6	-5/6
(0, 0, 0, 1, 0, 1)	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3	-5/6
(0, 0, 0, 1, 1, 0)	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6	-5/6	-5/3
(0, 0, 0, 1, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/3	-5/3	-5/3
(0, 0, 1, 0, 0, 0)	-5/6	-5/6	0	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 0, 1, 0, 0, 1)	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3	-5/6
(0, 0, 1, 0, 1, 0)	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3	-5/6	-5/3
(0, 0, 1, 0, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3	-5/3
(0, 0, 1, 1, 0, 0)	-5/3	-5/3	-5/6	-5/6	-5/3	-5/3
(0, 0, 1, 1, 0, 1)	-5/2	-5/2	-5/3	-5/3	-5/2	-5/3
(0, 0, 1, 1, 1, 0)	-5/2	-5/2	-5/3	-5/3	-5/3	-5/2
(0, 0, 1, 1, 1, 1)	-10/3	-10/3	-5/2	-5/2	-5/2	-5/2
(0, 1, 0, 0, 0, 0)	-5/6	0	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(0, 1, 0, 0, 0, 1)	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6
(0, 1, 0, 0, 1, 0)	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3
(0, 1, 0, 0, 1, 1)	-5/2	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3	-5/3
(0, 1, 0, 1, 0, 0)	-5/3	-5/6	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3
(0, 1, 0, 1, 0, 1)	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3
(0, 1, 0, 1, 1, 0)	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3	-5/3	-5/2
(0, 1, 0, 1, 1, 1)	-10/3	-5/2	-10/3	-5/2	-5/2	-5/2
(0, 1, 1, 0, 0, 0)	-5/3	-5/6	-5/6	-5/3	-5/3	-5/3
(0, 1, 1, 0, 0, 1)	-5/2	-5/3	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3
(0, 1, 1, 0, 1, 0)	-5/2	-5/3	-5/3	-5/2	-5/3	-5/2
(0, 1, 1, 0, 1, 1)	-10/3	-5/2	-5/2	-10/3	-5/2	-5/2
(0, 1, 1, 1, 0, 0)	-5/2	-5/3	-5/3	-5/3	-5/2	-5/2
(0, 1, 1, 1, 0, 1)	-10/3	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3	-5/2
(0, 1, 1, 1, 1, 0)	-10/3	-5/2	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3
(0, 1, 1, 1, 1, 1)	-25/6	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3
(1, 0, 0, 0, 0, 0)	0	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6	-5/6
(1, 0, 0, 0, 0, 1)	-5/6	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6
(1, 0, 0, 0, 1, 0)	-5/6	-5/3	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3
(1, 0, 0, 0, 1, 1)	-5/3	-5/2	-5/2	-5/2	-5/3	-5/3
(1, 0, 0, 1, 0, 0)	-5/6	-5/3	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3
(1, 0, 0, 1, 0, 1)	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3
(1, 0, 0, 1, 1, 0)	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3
(1, 0, 0, 1, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/2
(1, 0, 1, 0, 0, 0)	-5/3	-5/6	-5/3	-5/6	-5/3	-5/3
(1, 0, 1, 0, 0, 1)	-5/2	-5/3	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3
(1, 0, 1, 0, 1, 0)	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/3
(1, 0, 1, 0, 1, 1)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2	-5/2
(1, 0, 1, 1, 0, 0)	-5/2	-10/3	-10/3	-5/2	-5/2	-10/3
(1, 0, 1, 1, 0, 1)	-5/2	-10/3	-5/2	-5/2	-10/3	-5/2
(1, 0, 1, 1, 1, 0)	-5/2	-10/3	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3
(1, 0, 1, 1, 1, 1)	-10/3	-25/6	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3
(1, 1, 0, 0, 0, 0)	-5/6	-5/6	-5/3	-5/3	-5/3	-5/3
(1, 1, 0, 0, 0, 1)	-5/3	-5/3	-5/2	-5/2	-5/2	-5/3
(1, 1, 0, 0, 1, 0)	-5/3	-5/3	-5/2	-5/2	-5/3	-5/2
(1, 1, 0, 0, 1, 1)	-5/2	-5/2	-10/3	-10/3	-5/2	-5/2
(1, 1, 0, 1, 0, 0)	-5/3	-5/3	-5/2	-5/3	-5/2	-5/2
(1, 1, 0, 1, 0, 1)	-5/2	-5/2	-10/3	-5/2	-10/3	-5/2
(1, 1, 0, 1, 1, 0)	-5/2	-5/2	-10/3	-5/2	-5/2	-10/3
(1, 1, 0, 1, 1, 1)	-10/3	-10/3	-10/3	-25/6	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 0, 0)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 0, 1)	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-25/6	-10/3
(1, 1, 1, 0, 1, 0)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 0, 1, 1)	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-25/6	-10/3
(1, 1, 1, 1, 0, 0)	-5/2	-5/2	-5/2	-5/2	-10/3	-10/3
(1, 1, 1, 1, 0, 1)	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-25/6	-10/3
(1, 1, 1, 1, 1, 0)	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-10/3	-25/6
(1, 1, 1, 1, 1, 1)	-25/6	-25/6	-25/6	-25/6	-25/6	-25/6

Figura 1.12: A tragédia dos comuns com $n = 6$ e imposto $t = 1/6$.

1.7 Existência de soluções

Como vimos no jogo de combinar moedas no item (d) do exemplo 1.4, existem jogos que não possuem equilíbrios de Nash em estratégias puras e, até agora, todos os jogos apresentados em nossos exemplos possuem pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. Uma pergunta natural é se a existência de equilíbrios de Nash em estratégias mistas é um resultado geral ou não. A resposta é sim! Nos dois capítulos seguintes apresentaremos dois teoremas de existência: o teorema minimax de von Neumann para jogos de soma zero com dois jogadores e o teorema de equilíbrios de Nash para jogos gerais.

Capítulo 2

O teorema minimax de von Neumann

2.1 Jogos de soma constante com dois jogadores

Definição 2.1 (JOGOS DE SOMA CONSTANTE COM DOIS JOGADORES) Um jogo de *soma constante com dois jogadores* é um jogo com dois jogadores, comumente denominados *jogador linha* e *jogador coluna*, com estratégias

$$S_{\text{jogador linha}} = \{1, 2, \dots, m\}$$

e

$$S_{\text{jogador coluna}} = \{1, 2, \dots, n\}$$

e matriz de *payoff*

		jogador coluna			
		1	2	...	n
jogador linha	1	(a_{11}, b_{11})	(a_{12}, b_{12})	...	(a_{1n}, b_{1n})
	2	(a_{21}, b_{21})	(a_{22}, b_{22})	...	(a_{2n}, b_{2n})
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	m	(a_{m1}, b_{m1})	(a_{m2}, b_{m2})	...	(a_{mn}, b_{mn})

satisfazendo $a_{ij} + b_{ij} = c = \text{constante}$, para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$. No caso particular em que a constante c é zero, dizemos que o jogo tem *soma zero*.

Em termos de estratégias mistas, se $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_m) \in \Delta_m$ é uma distribuição de probabilidades para as estratégias puras do jogador linha e $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n) \in \Delta_n$ é uma distribuição de probabilidades para as estratégias puras do jogador coluna, então o *payoff* esperado para o jogador linha é

$$u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_i q_j a_{ij} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

isto é,

$$u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T A \mathbf{q}, \quad \text{com } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Analogamente, o *payoff* esperado para o jogador coluna é dado por

$$u_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T B \mathbf{q}, \quad \text{com } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uma vez que o jogo tem soma constante, vemos que

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & c & \cdots & c \\ c & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & c \end{bmatrix},$$

isto é,

$$A + B = C = \begin{bmatrix} c & c & \cdots & c \\ c & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & \cdots & c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = c \mathbf{1},$$

onde $\mathbb{1}$ denota a matriz $m \times n$ formada com 1 em todas as suas entradas. Sendo assim, é fácil de ver que

$$u_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^T B \mathbf{q} = \mathbf{p}^T (c \mathbb{1} - A) \mathbf{q} = c \mathbf{p}^T \mathbb{1} \mathbf{q} - \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = c - u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q})$$

onde, na última igualdade, usamos que $\mathbf{p}^T \mathbb{1} \mathbf{q} = 1$, pois \mathbf{p} e \mathbf{q} são distribuições de probabilidades e, por isto,

$$\sum_{i=1}^m p_i = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n q_j = 1.$$

Em particular, vale a seguinte propriedade importante:

$$u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) \quad \text{se, e somente se,} \quad u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq u_c(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*). \quad (2.1)$$

2.2 Equilíbrio de Nash em estratégias puras

Definição 2.2 (PONTO DE SELA) Dizemos que um elemento a_{ij} de uma matriz A é um *ponto de sela* da matriz A se ele for simultaneamente um mínimo em sua linha e um máximo em sua coluna, isto é, se

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leq a_{il} \text{ para todo } l = 1, \dots, n && \text{e} \\ a_{ij} &\geq a_{kj} \text{ para todo } k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Teorema 2.1 O elemento a_{ij} é um ponto de sela da matriz A se, e somente se, o par (i, j) é um equilíbrio de Nash em estratégias puras para o jogo.

Demonstração:

(\Rightarrow) Seja a_{ij} um ponto de sela da matriz A . Como a_{ij} é máximo em sua coluna, vale que

$$u_l(i, j) = a_{ij} \geq a_{kj} = u_l(k, j)$$

para todo $k = 1, \dots, m$, isto é, o jogador linha não pode aumentar o seu *payoff* se o jogador coluna mantiver a escolha da coluna j . Por outro lado, como a_{ij} é mínimo em sua linha, vale que

$$u_c(i, j) = b_{ij} = c - a_{ij} \geq c - a_{il} = b_{il} = u_c(i, l)$$

para todo $l = 1, \dots, n$, isto é, o jogador coluna não pode aumentar o seu *payoff* se o jogador linha mantiver a escolha da linha i . Isto mostra que o perfil de estratégia pura (i, j) é um equilíbrio de Nash do jogo.

(\Leftarrow) Seja (i, j) é um equilíbrio de Nash do jogo. A partir das considerações acima, é fácil de ver que a_{ij} é máximo em sua coluna e mínimo em sua linha e que, portanto, a_{ij} é um ponto de sela da matriz A . ■

Teorema 2.2 Se a_{ij} e a_{rs} são dois pontos de sela da matriz A , então a_{is} e a_{rj} também são pontos de sela da matriz A e

$$a_{ij} = a_{rs} = a_{is} = a_{rj}.$$

Demonstração: Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{is} & \cdots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \cdots & a_{rj} & \cdots & a_{rs} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}.$$

Como a_{ij} e a_{rs} são pontos de sela, sabemos que eles são mínimos em suas respectivas linhas e máximos em suas respectivas colunas. Assim,

$$a_{ij} \leq a_{is} \leq a_{rs} \quad \text{e} \quad a_{ij} \geq a_{rj} \geq a_{rs},$$

e, portanto,

$$a_{ij} = a_{is} = a_{rj} = a_{rs}.$$

Observe que a_{is} é mínimo em sua linha, pois $a_{ij} = a_{is}$ é mínimo da mesma linha e que a_{is} é máximo em sua coluna, pois $a_{rs} = a_{is}$ é máximo da mesma coluna. Analogamente, a_{rj} é mínimo em sua linha, pois $a_{rs} = a_{rj}$ é mínimo

da mesma linha e a_{rj} é máximo em sua coluna, pois $a_{rj} = a_{ij}$ é máximo da mesma coluna. Concluimos então que a_{is} e a_{rj} também são pontos de sela da matriz A . ■

O *payoff* mínimo do jogador linha, se ele escolher a linha k , é dado por

$$\underline{a}_k = \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}.$$

Analogamente, o *payoff* mínimo do jogador coluna, se ele escolher a coluna l , é dado por $c - \bar{a}_l$, onde

$$\bar{a}_l = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}.$$

Defina

$$v_l(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a}_k = \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} \quad \text{e} \quad v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \bar{a}_l = \min_{1 \leq l \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kl}.$$

Teorema 2.3 Para toda matriz A , tem-se $v_c(A) \geq v_l(A)$.

Demonstração: Temos que para todo $k = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$,

$$a_{kj} \geq \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl}.$$

Assim,

$$\max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A),$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Conseqüentemente,

$$v_c(A) = \min_{1 \leq j \leq n} \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} \geq \max_{1 \leq k \leq m} \min_{1 \leq l \leq n} a_{kl} = v_l(A). \quad \blacksquare$$

O próximo teorema caracteriza a existência de pontos de sela e, portanto, a existência de equilíbrios de Nash em estratégias puras, em termos das funções v_l e v_c .

Teorema 2.4 Uma matriz A tem um ponto de sela se, e somente se, $v_l(A) = v_c(A)$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Se a_{ij} é um ponto de sela da matriz A , então $a_{ij} = \min_{1 \leq l \leq n} a_{il} = \underline{a}_i$. Como $v_l(A) = \max_{1 \leq k \leq m} \underline{a}_k$, é claro que $v_l(A) \geq \underline{a}_i = a_{ij}$. Por outro lado, $a_{ij} = \max_{1 \leq k \leq m} a_{kj} = \overline{a}_j$. Como $v_c(A) = \min_{1 \leq l \leq n} \overline{a}_l$, segue-se que $v_c(A) \leq \overline{a}_j = a_{ij}$. Combinando estas duas desigualdades, concluímos que $v_c(A) \leq a_{ij} \leq v_l(A)$. Mas, pelo teorema anterior, $v_c(A) \geq v_l(A)$ e, sendo assim, $v_c(A) = v_l(A)$.

(\Leftarrow) Como $v_l(A) = \max_{1 \leq r \leq m} \underline{a}_r$, existe uma linha i tal que $v_l(A) = \underline{a}_i$. Como, por sua vez, $\underline{a}_i = \min_{1 \leq s \leq n} a_{is}$, existe uma coluna l tal que $\underline{a}_i = a_{il}$. Assim, $v_l(A) = \underline{a}_i = a_{il}$. Analogamente, como $v_c(A) = \min_{1 \leq s \leq n} \overline{a}_s$, existe uma coluna j tal que $v_c(A) = \overline{a}_j$. Como, por sua vez, $\overline{a}_j = \max_{1 \leq r \leq m} a_{rj}$, existe uma linha k tal que $\overline{a}_j = a_{kj}$. Assim, $v_c(A) = \overline{a}_j = a_{kj}$. Uma vez que, por hipótese, $v_l(A) = v_c(A)$, temos que

$$a_{il} = \underline{a}_i = v_l(A) = v_c(A) = \overline{a}_j = a_{kj}.$$

Afirmamos que a_{ij} é um ponto de sela da matriz A . Com efeito, $a_{ij} \leq \overline{a}_j = \underline{a}_i \leq a_{is}$, para todo $s = 1, \dots, n$, isto é, a_{ij} é o mínimo de sua linha. Por outro lado, $a_{ij} \geq \underline{a}_i = \overline{a}_j \geq a_{rj}$, para todo $r = 1, \dots, m$, isto é, a_{ij} é o máximo de sua coluna. Portanto, a_{ij} é um ponto de sela da matriz A . ■

Corolário 2.1 Um jogo de dois jogadores com soma constante definido pela matriz de *payoffs* A do jogador linha tem um equilíbrio de Nash em estratégias puras se, e somente se,

$$v_l(A) = v_c(A).$$

2.3 Equilíbrio de Nash em estratégias mistas

Defina

$$v_l(A) = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \quad \text{e} \quad v_c(A) = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}.$$

Teorema 2.5 Para toda matriz A , tem-se $v_c(A) \geq v_l(A)$.

Demonstração: Temos que para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$,

$$\mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{y}.$$

Assim,

$$\max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{y} = v_l(A).$$

Conseqüentemente,

$$v_c(A) = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{y} = v_l(A). \quad \blacksquare$$

O próximo teorema caracteriza a existência de equilíbrios de Nash em estratégias mistas em termos das funções v_l e v_c .

Teorema 2.6 Um perfil de estratégia mista $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash de um jogo de dois jogadores com soma constante definido pela matriz de *payoffs* A do jogador linha se, e somente se,

$$v_l(A) = v_c(A) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^*.$$

Demonstração:

(\Rightarrow) Se $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash, então

$$\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \geq u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^*,$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$. Em particular,

$$\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* \geq \min_{\mathbf{y} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{y} = v_c(A).$$

Vale também que

$$\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \leq c - u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q},$$

para todo $\mathbf{q} \in \Delta_n$. Em particular,

$$\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} \leq \max_{\mathbf{x} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{x}^T A \mathbf{q} = v_l(A).$$

Desta maneira, $v_l(A) \geq v_c(A)$. Como, pelo teorema anterior, $v_l(A) \leq v_c(A)$, concluímos que $v_l(A) = v_c(A)$.

(\Leftarrow) Como $v_l(A) = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}$, existe $\mathbf{p}^* \in \Delta_m$ tal que

$$v_l(A) = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}.$$

Analogamente, como $v_c(A) = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}$, existe $\mathbf{q}^* \in \Delta_n$ tal

$$v_c(A) = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^*.$$

Uma vez que, por hipótese, $v_l(A) = v_c(A)$, temos que

$$\min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} = v_l(A) = v_c(A) = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^*.$$

Afirmamos que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. Com efeito,

$$u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* \geq \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{x}, \mathbf{q}^*),$$

para todo $\mathbf{x} \in \Delta_m$. Por outro lado,

$$u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = c - \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* \geq c - \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* = c - \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} \geq c - \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{y} = u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{y}),$$

para todo $\mathbf{y} \in \Delta_n$. Desta maneira, $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. ■

2.4 O teorema minimax de von Neumann

O próximo teorema estabelece que, para jogos de dois jogadores com *soma zero*, $v_l(A) = v_c(A)$ sempre. Sendo assim, pelo teorema 2.6, segue-se que, para esta classe de jogos, sempre existe pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

Teorema 2.7 (MINIMAX DE VON NEUMANN) Para todo jogo de soma zero com dois jogadores, representado pela matriz de *payoffs* A do jogador linha, sempre existe um perfil de estratégia mista $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) \in \Delta_m \times \Delta_n$ satisfazendo

$$v_l(A) = \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* = \min_{\mathbf{q} \in \Delta_n} \max_{\mathbf{p} \in \Delta_m} \mathbf{p}^T A \mathbf{q} = v_c(A).$$

Em particular, $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo.

Daremos uma demonstração deste teorema minimax de von Neumann usando o *teorema de dualidade* da teoria de programação linear. Lembramos que um problema de programação linear é um problema de otimização com função objetivo e restrições lineares:

(problema primal)

maximizar $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ sujeito a $A\mathbf{y} \leq \mathbf{c},$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0},$
--

onde as desigualdades devem ser interpretadas componente a componente. A cada problema de programação linear (problema primal) podemos associar um outro problema de otimização (problema dual):

(problema dual)

minimizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{x}^T A \geq \mathbf{b}^T,$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

Teorema 2.8 (DA DUALIDADE EM PROGRAMAÇÃO LINEAR)

- (a) O problema primal possui uma solução se, e somente se, o problema dual possui uma solução.
- (b) Se \mathbf{y}^* é solução do problema primal e \mathbf{x}^* é solução do problema dual, então $\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$.

Uma demonstração do teorema de dualidade pode ser encontrada em [12].

Demonstração do teorema minimax: sem perda de generalidade, podemos assumir que todas as entradas da matriz de *payoffs* A do jogador linha são positivas. Caso contrário, basta substituir A por $\tilde{A} = A + D$ e $B = -A$ por $\tilde{B} = -D + B$, onde $D = d \mathbf{1}$, com $d > \max_{1 \leq i \leq m} \max_{1 \leq j \leq n} |a_{ij}|$. Observe que $\tilde{A} + \tilde{B} = \mathbf{0}$ (isto é, o jogo definido pelas matrizes \tilde{A} e \tilde{B} tem soma zero) e que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash para o jogo definido pela matriz A se, e somente se, $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash para o jogo definido pela matriz \tilde{A} .

Sejam $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1)^T$ e $\mathbf{b} = (1, 1, \dots, 1)^T$. Considere os problemas de programação linear:

(problema primal)	(problema dual)
maximizar $\mathbf{b}^T \mathbf{y}$ sujeito a $A\mathbf{y} \leq \mathbf{c},$ $\mathbf{y} \geq \mathbf{0},$	minimizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$ sujeito a $\mathbf{x}^T A \geq \mathbf{b}^T,$ $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$

PASSO 1: o problema dual possui uma solução.

Como $A > \mathbf{0}$, o conjunto admissível $X = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{x}^T A \geq \mathbf{b}^T \text{ e } \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ é não vazio. Por outro lado, como $\mathbf{c} = (1, 1, \dots, 1)^T$, a função objetivo do problema é escrita como $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mapsto \mathbf{c}^T \mathbf{x} = x_1 + x_2 + \dots + x_m$. Assim, o problema dual consiste em encontrar o ponto do conjunto X mais próximo da origem segundo a norma da soma $\|\cdot\|_1$, um problema que certamente possui uma solução pois, se $\mathbf{p} \in X$, então podemos “compactificar” o conjunto admissível incluindo a restrição $\|\mathbf{x}\|_1 \leq \|\mathbf{p}\|_1$ e, com isso, podemos usar o teorema de Weierstrass para garantir a existência de um mínimo.

PASSO 2: construção do equilíbrio de Nash.

Dado que o problema dual possui uma solução, pelo teorema de dualidade, o problema primal também possui. Mais ainda: se \mathbf{x}^* é solução do problema dual e \mathbf{y}^* é solução do problema primal, então

$$\mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*.$$

Seja $\theta = \mathbf{c}^T \mathbf{x}^* = \mathbf{b}^T \mathbf{y}^*$ (que é > 0 pois $(0, 0, \dots, 0)$ não é admissível) e defina

$$\mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{x}^*}{\theta} \quad \text{e} \quad \mathbf{q}^* = \frac{\mathbf{y}^*}{\theta}.$$

Afirmamos que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. Com efeito: claramente $\mathbf{p}^* \in \Delta_m$ e $\mathbf{q}^* \in \Delta_n$, pois $\mathbf{p}^* \geq \mathbf{0}$ (já que $\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}$ e $\theta > 0$), $\mathbf{q}^* \geq \mathbf{0}$ (já que $\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}$ e $\theta > 0$),

$$\sum_{i=1}^m p_i = \sum_{i=1}^m \frac{x_i^*}{\theta} = \frac{\mathbf{c}^T \mathbf{x}^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1 \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^n q_j = \sum_{j=1}^n \frac{y_j^*}{\theta} = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{y}^*}{\theta} = \frac{\theta}{\theta} = 1.$$

Agora, como $\mathbf{x}^{*T} A \geq \mathbf{b}^T$, temos que para todo $\mathbf{q} \in \Delta_n$, $\mathbf{x}^{*T} A \mathbf{q} \geq \mathbf{b}^T \mathbf{q} = \sum_{j=1}^n q_j = 1$. Mas $\mathbf{x}^* = \mathbf{p}^*/\theta$. Desta maneira, $\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} \geq \theta = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^*$, para todo $\mathbf{q} \in \Delta_n$. Conseqüentemente,

$$u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = -\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* \geq -\mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q} = u_c(\mathbf{p}^*, \mathbf{q})$$

para todo $\mathbf{q} \in \Delta_n$. Mostramos então que o jogador coluna não pode aumentar o seu *payoff* esperado trocando \mathbf{q}^* por \mathbf{q} , se o jogador linha mantiver a escolha \mathbf{p}^* . Analogamente, como $A \mathbf{y} \leq \mathbf{c}$, temos que para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$, $\mathbf{p}^T A \mathbf{y}^* \leq \mathbf{p}^T \mathbf{c} = \sum_{i=1}^m p_i = 1$. Mas $\mathbf{y}^* = \mathbf{q}^*/\theta$. Desta maneira, $\mathbf{p}^* A \mathbf{q}^* \leq \theta = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^*$, para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$. Conseqüentemente,

$$u_l(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = \mathbf{p}^{*T} A \mathbf{q}^* \geq \mathbf{p}^T A \mathbf{q}^* = u_l(\mathbf{p}, \mathbf{q}^*),$$

para todo $\mathbf{p} \in \Delta_m$. Mostramos então que o jogador linha não pode aumentar o seu *payoff* esperado trocando \mathbf{p}^* por \mathbf{p} , e o jogador coluna mantiver a escolha \mathbf{q}^* . Concluimos, portanto, que $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$ é um equilíbrio de Nash do jogo. ■

Além de estabelecer a existência de equilíbrios de Nash, a demonstração que demos sugere uma maneira de calculá-los: resolvendo-se dois problemas de programação linear.

Exemplo 2.1 O governo deseja vacinar seus cidadãos contra um certo vírus da gripe. Este vírus possui dois sorotipos, sendo que é desconhecida a proporção na qual os dois sorotipos ocorrem na população do vírus. Foram desenvolvidas duas vacinas onde a eficácia da vacina 1 é de 85% contra o sorotipo 1 e de 70% contra o sorotipo 2. A eficácia da vacina 2 é de 60% contra o sorotipo 1 e de 90% contra o sorotipo 2. Qual política de vacinação deveria ser tomada pelo governo?

Esta situação pode ser modelada como um jogo de soma zero com dois jogadores, onde o jogador linha L (o governo) deseja fazer a compensação

(a fração dos cidadãos resistentes ao vírus) o maior possível e o jogador coluna C (o vírus) deseja fazer a compensação a menor possível. A matriz de *payoffs* é a seguinte:

		vírus	
		sorotipo 1	sorotipo 2
governo	vacina 1	(85/100, -85/100)	(70/100, -70/100)
	vacina 2	(60/100, -60/100)	(90/100, -90/100)

Para encontrar um equilíbrio de Nash, devemos resolver os seguintes problemas de programação linear

(problema primal)

maximizar	$y_1 + y_2$
sujeito a	$\begin{bmatrix} 85/100 & 70/100 \\ 60/100 & 90/100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

(problema dual)

minimizar	$x_1 + x_2$
sujeito a	$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 85/100 & 70/100 \\ 60/100 & 90/100 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},$ $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

isto é,

(problema primal)

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & y_1 + y_2 \\
 \text{sujeito a} & 17y_1 + 14y_2 = 20, \\
 & 6y_1 + 9y_2 = 10, \\
 & y_1 \geq 0, \\
 & y_2 \geq 0,
 \end{array}$$

(problema dual)

$$\begin{array}{ll}
 \text{maximizar} & x_1 + x_2 \\
 \text{sujeito a} & 7x_1 + 12x_2 = 20, \\
 & 7x_1 + 9x_2 = 10, \\
 & x_1 \geq 0, \\
 & x_2 \geq 0.
 \end{array}$$

A solução do problema dual é $\mathbf{x}^* = (20/23, 10/23)$ (figura 2.1) e a solução do problema primal é $\mathbf{y}^* = (40/69, 50/69)$, com

$$\theta = x_1^* + x_2^* = y_1^* + y_2^* = \frac{30}{23}.$$

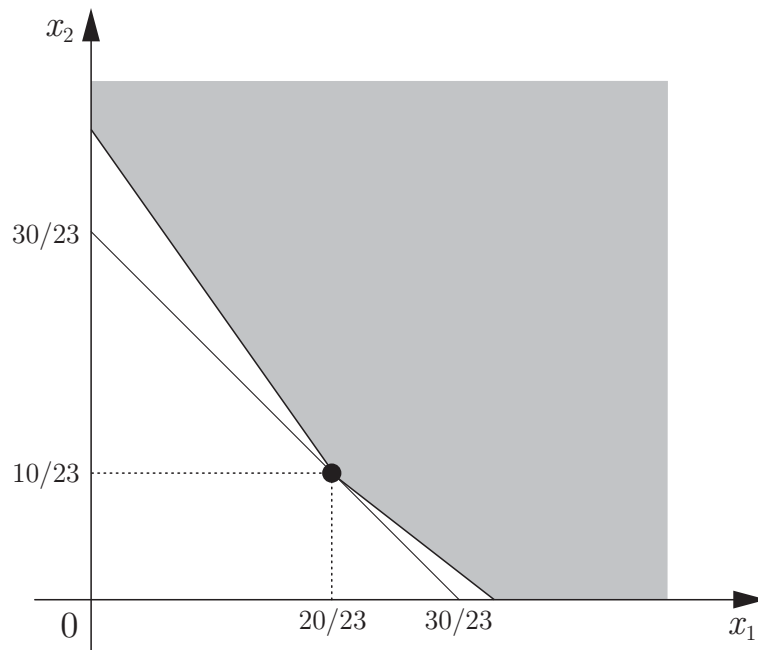


Figura 2.1: Solução do problema dual.

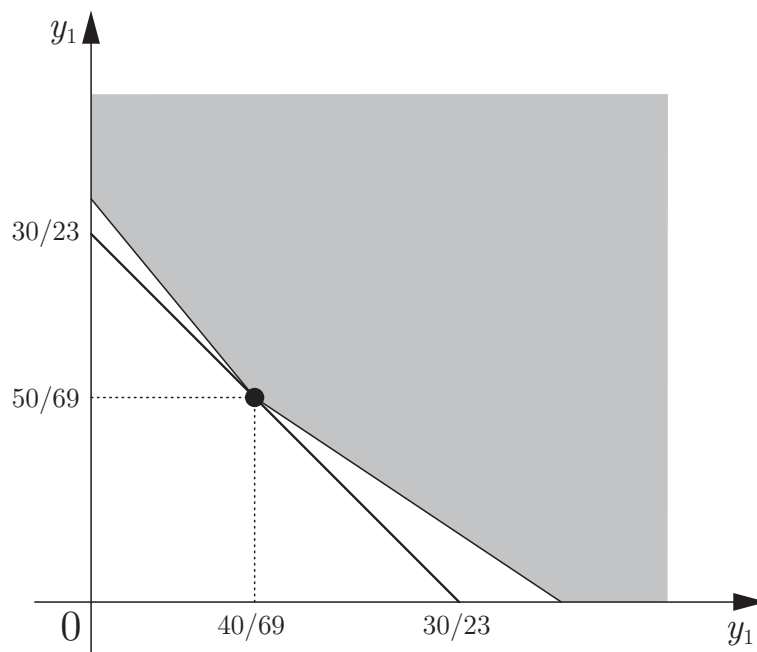


Figura 2.2: Solução do problema primal.

Desta maneira, o único equilíbrio de Nash para o problema é dado pelo ponto $(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*)$, onde

$$\mathbf{p}^* = \frac{\mathbf{x}^*}{\theta} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{q}^* = \frac{\mathbf{y}^*}{\theta} = \left(\frac{4}{9}, \frac{5}{9} \right). \quad \blacksquare$$

Capítulo 3

O teorema de equilíbrio de Nash

O teorema minimax de von Neumann demonstra a existência de um equilíbrio de Nash para uma classe muito restrita de jogos, a saber, a classe dos jogos de soma zero com apenas dois jogadores. De fato, o resultado é geral: todo jogo definido por matrizes de *payoffs* possui um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. A demonstração que apresentaremos aqui é devida a John Nash e ela faz uso do teorema do ponto fixo de Brouwer [10].

Teorema 3.1 (DO PONTO FIXO DE BROUWER) Se Δ é um subconjunto compacto e convexo de um espaço euclidiano de dimensão finita e $\mathbf{F}: \Delta \rightarrow \Delta$ é uma função contínua, então \mathbf{F} possui um ponto fixo em Δ , isto é, existe $\mathbf{p}^* \in \Delta$ tal que

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*.$$

Com as notações das seções 1.3 e 1.4, estabeleceremos uma seqüência de teoremas que fornecem caracterizações alternativas para um equilíbrio de Nash.

Teorema 3.2 Para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, defina as funções

$$\begin{aligned} z_{ij}: \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto z_{ij}(\mathbf{p}) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}) - u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{-i}) \end{aligned}$$

(isto é, z_{ij} mede o ganho ou perda do jogador g_i quando ele troca a distribuição de probabilidade \mathbf{p}_i pela estratégia pura s_{ij}). Temos que \mathbf{p}^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Se $\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*)$ é um equilíbrio de Nash, então $u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \geq u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*)$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. Conseqüentemente,

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) - u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

(\Leftarrow) Se

$$z_{ij}(\mathbf{p}^*) = u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) - u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, então

$$u_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, onde \mathbf{e}_j é o vetor em \mathbb{R}^{m_i} que tem 1 na j -ésima coordenada e zero nas demais. Devemos mostrar que para todo $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, \dots, p_{im_i}) \in \Delta_{m_i}$

$$u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*).$$

Mas, por $\mathbf{x} \mapsto u_i(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{-i}^*)$ ser um funcional linear, temos que

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{-i}^*) &= u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot \mathbf{e}_k, \mathbf{p}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{p}_{-i}^*) \leq \\ &\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} \cdot u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, usamos o fato de que $\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} = 1$, dado que $\mathbf{p}_i \in \Delta_{m_i}$. ■

Teorema 3.3 Para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, defina as funções

$$\begin{aligned} g_{ij}: \Delta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{p} &\mapsto g_{ij}(\mathbf{p}) = \max\{0, z_{ij}(\mathbf{p})\} \end{aligned}$$

Temos que \mathbf{p} é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$g_{ij}(\mathbf{p}) = 0$$

para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$.

Demonstração: A prova segue imediatamente do teorema anterior. ■

Teorema 3.4 Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \mathbf{F}: \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n} &\rightarrow \Delta = \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \times \dots \times \Delta_{m_n} \\ \mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) &\mapsto \mathbf{F}(\mathbf{p}) = (\mathbf{y}_1(\mathbf{p}), \mathbf{y}_2(\mathbf{p}), \dots, \mathbf{y}_n(\mathbf{p})) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{y}_i(\mathbf{p}) = (y_{i1}(\mathbf{p}), y_{i2}(\mathbf{p}), \dots, y_{im_i}(\mathbf{p}))$, $\mathbf{p}_i = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{im_i})$ e

$$y_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{p_{ij} + g_{ij}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}$$

Temos que \mathbf{p}^* é um equilíbrio de Nash se, e somente se,

$$\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*,$$

isto é, se, e somente se, \mathbf{p}^* é um ponto fixo da aplicação \mathbf{F} .

Demonstração: observe que, de fato, $\mathbf{F}(\Delta) \subseteq \Delta$ pois claramente $y_{ij} \geq 0$ e

$$\sum_{k=1}^{m_i} y_{ik}(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^{m_i} \left(\frac{p_{ik} + g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik} + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} = \frac{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p})} = 1,$$

isto é, cada $\mathbf{y}_i(\mathbf{p}) \in \Delta_{m_i}$.

(\Rightarrow) Se \mathbf{p}^* é um equilíbrio de Nash, então $g_{ij}(\mathbf{p}^*) = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$. Desta maneira, $y_{ij}(\mathbf{p}^*) = p_{ij}^*$ para cada $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m_i$, isto é, $\mathbf{y}_i(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}_i^*$ para cada $i = 1, \dots, n$ ou, ainda, $\mathbf{F}(\mathbf{p}^*) = \mathbf{p}^*$.

(\Leftarrow) Suponha que $\mathbf{p}^* = (\mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*, \dots, \mathbf{p}_n^*) \in \Delta = \Delta_{m_1} \times \dots \times \Delta_{m_n}$ seja um ponto fixo da aplicação $\mathbf{F}: \Delta \rightarrow \Delta$, isto é, suponha que

$$p_{ij}^* = \frac{p_{ij}^* + g_{ij}(\mathbf{p}^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*)}$$

para todo $j = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$. Segue-se então que

$$p_{ij}^* \cdot \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*) = g_{ij}(\mathbf{p}^*),$$

para todo $j = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$. Afirmamos que $\alpha = \sum_{k=1}^{m_i} g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$, de modo que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $k = 1, \dots, m_i$ e $i = 1, \dots, n$. De fato: se, por absurdo, $\alpha > 0$, vemos a partir da relação acima que

$$g_{ij}(\mathbf{p}^*) > 0 \quad \text{se, e somente se,} \quad p_{ij}^* > 0.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $p_{i1}^* > 0, p_{i2}^* > 0, \dots, p_{il}^* > 0$ e $p_{i(l+1)}^* = p_{i(l+2)}^* = \dots = p_{im_i}^* = 0$. Observe que

$$\mathbf{p}_i^* = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \mathbf{e}_k,$$

onde \mathbf{e}_i é o i -ésimo vetor da base canônica de \mathbb{R}^{m_i} . Dado que $g_{ik}(\mathbf{p}^*) > 0$ para todo $k = 1, \dots, l$, temos que

$$u_i(\mathbf{e}_i, \mathbf{p}_{-i}^*) > u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*),$$

para todo $k = 1, \dots, l$. Desta maneira,

$$u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i\left(\sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \mathbf{e}_k, \mathbf{p}_{-i}^*\right) = \sum_{k=1}^{m_i} p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{p}_{-i}^*) = \sum_{k=1}^l p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{e}_k, \mathbf{p}_{-i}^*)$$

>

$$\sum_{k=1}^l p_{ik}^* \cdot u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*) \cdot \sum_{k=1}^l p_{ik}^* = u_i(\mathbf{p}_i^*, \mathbf{p}_{-i}^*),$$

um absurdo. Isto demonstra que $g_{ij}(\mathbf{p}^*) = 0$ para todo $j = 1, \dots, m_i$ e $j = 1, \dots, m$ e, assim, \mathbf{p}^* é um equilíbrio de Nash em estratégias mistas. ■

Teorema 3.5 (DO EQUILÍBRIO DE NASH) Todo jogo definido por matrizes de *payoffs* possui um equilíbrio de Nash.

Demonstração: A aplicação $\mathbf{F}: \Delta \rightarrow \Delta$ definida no teorema anterior é contínua e Δ é um conjunto compacto e convexo. Pelo teorema do ponto fixo de Brouwer, \mathbf{F} possui um ponto fixo \mathbf{p}^* . Pelo teorema anterior, \mathbf{p}^* é um equilíbrio de Nash. ■

O teorema 3.3 sugere uma maneira de se calcular os equilíbrios de Nash de um jogo. Eles são soluções do seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} (g_{ij}(\mathbf{p}))^2 \\ \text{sujeito a} \quad \mathbf{p} \in \Delta. \end{array}$$

Com efeito: a soma de quadrados é zero se, e somente se, cada parcela é igual a zero.

Exemplo 3.1 Para o dilema do prisioneiro (exemplo 1.1, página 6),

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1 - p; q, 1 - q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$$

é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad G(p, q) = (\max\{0, -(-1 + p)(4q + 1)\})^2 + \\ \quad (\max\{0, -p(4q + 1)\})^2 + \\ \quad (\max\{0, -(4p + 1)(-1 + q)\})^2 + \\ \quad (\max\{0, -q(4p + 1)\})^2 \\ \text{sujeito a} \quad 0 \leq p \leq 1, \\ \quad 0 \leq q \leq 1. \end{array}$$

Como vemos pela figura 3.1, que mostra o gráfico e o mapa de contorno de G , o ponto

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (1, 0; 1, 0)$$

é o único equilíbrio de Nash do jogo. ■

Exemplo 3.2 Para a batalha dos sexos (exemplo 1.2, página 7),

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1 - p; q, 1 - q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$$

é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{minimizar } G(p, q) = & (\max \{0, -5(-1 + p)(3q - 1)\})^2 + \\ & (\max \{0, -5p(3q - 1)\})^2 + \\ & (\max \{0, -5(3p - 2)(-1 + q)\})^2 + \\ & (\max \{0, -5q(3p - 2)\})^2 \\ \text{sujeito a } & 0 \leq p \leq 1, \\ & 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

Como vemos pela figura 3.2, que mostra o gráfico e o mapa de contorno de G , os pontos

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (1, 0; 1, 0), (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (0, 1; 0, 1) \text{ e } (\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (2/3, 1/3; 1/3, 2/3)$$

são os únicos equilíbrios de Nash do jogo. ■

Exemplo 3.3 Para o jogo do item (d) do exemplo 1.4 da página 11,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1 - p; q, 1 - q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$$

é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{minimizar } G(p, q) = & (\max \{0, -2(-1 + p)(2q - 1)\})^2 + \\ & (\max \{0, -2p(2q - 1)\})^2 + \\ & (\max \{0, 2(2p - 1)(-1 + q)\})^2 + \\ & (\max \{0, 2(2p - 1)q\})^2 \\ \text{sujeito a } & 0 \leq p \leq 1, \\ & 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$$

Como vemos pela figura 3.3, que mostra o gráfico e o mapa de contorno de G , o ponto

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (1/2, 1/2; 1/2, 1/2)$$

é o único equilíbrio de Nash do jogo. ■

Exemplo 3.4 Para o jogo do exemplo 1.6 da página 17,

$$(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = (p, 1 - p; q, 1 - q) \in \Delta_2 \times \Delta_2$$

é um equilíbrio de Nash se, e somente se, (p, q) é solução do seguinte problema de otimização

$\begin{aligned} \text{minimizar } G(p, q) = & (\max \{0, -2(-1+p)(2q-1)\})^2 + \\ & (\max \{0, -2p(2q-1)\})^2 + \\ & (\max \{0, (-3+4p)(-1+q)\})^2 + \\ & (\max \{0, q(-3+4p)\})^2 \\ \text{sujeito a } & 0 \leq p \leq 1, \\ & 0 \leq q \leq 1. \end{aligned}$
--

Como vemos pela figura 3.4, que mostra o gráfico e o mapa de contorno de G , o ponto

$$(\mathbf{p}^*, \mathbf{q}^*) = (3/4, 1/4; 1/2, 1/2)$$

é o único equilíbrio de Nash do jogo. ■

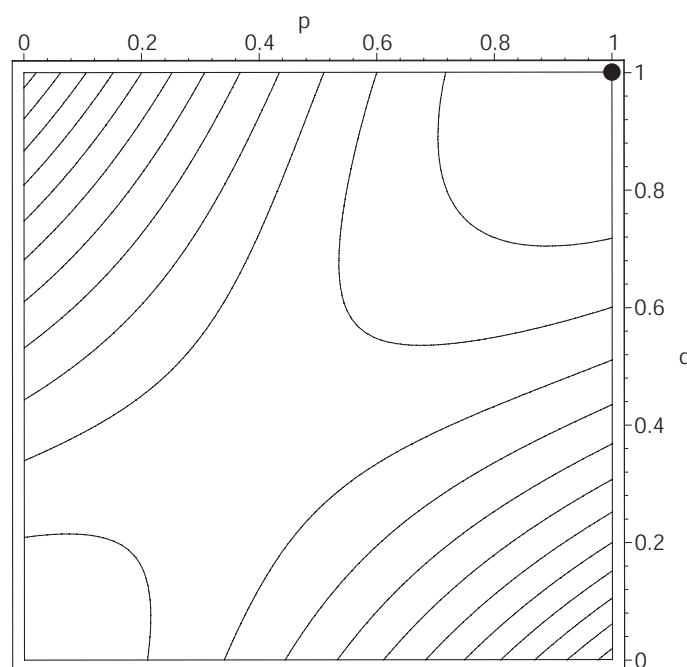
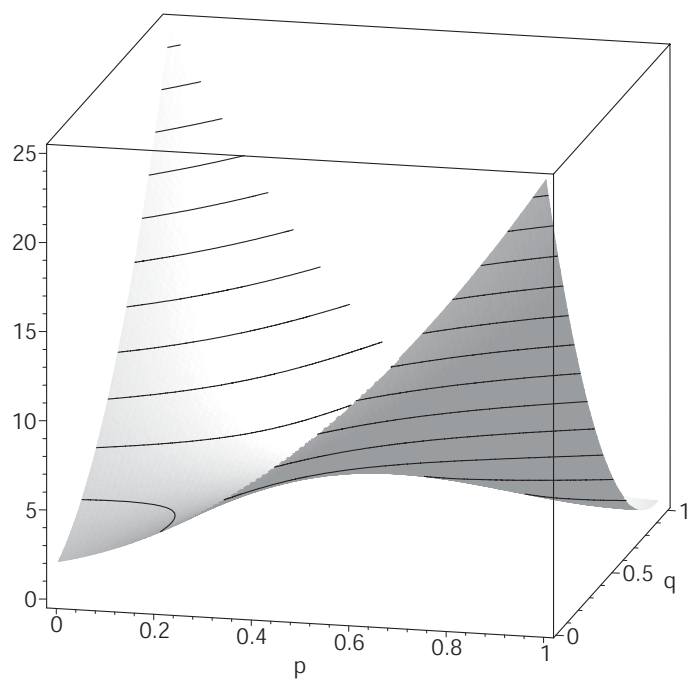


Figura 3.1: Encontrando os equilíbrios de Nash para o dilema do prisioneiro via um problema de otimização.

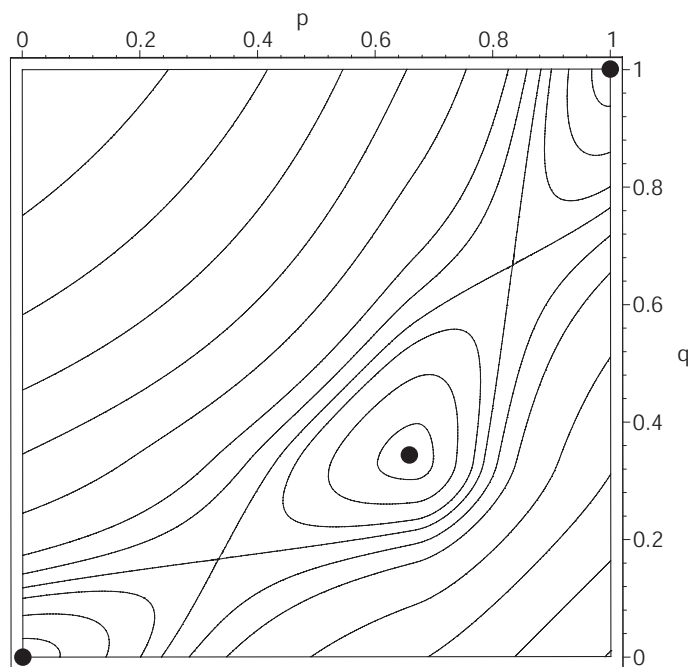
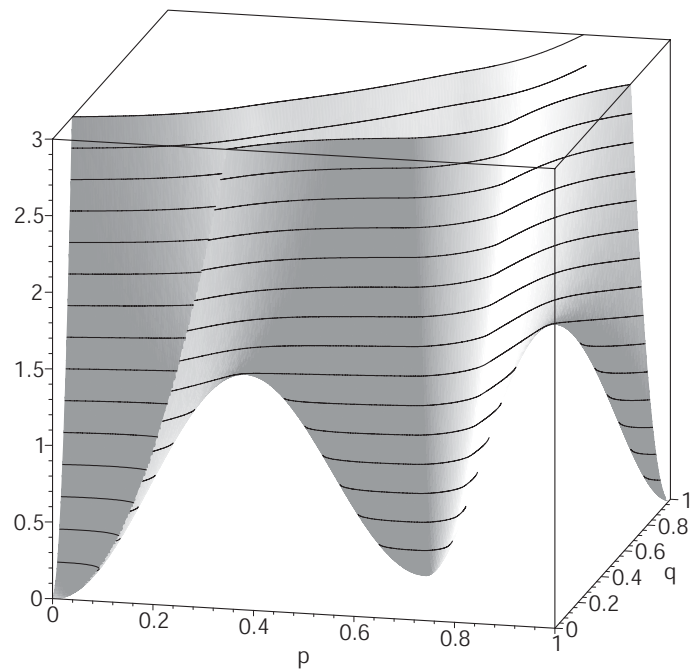


Figura 3.2: Encontrando os equilíbrios de Nash para a batalha dos sexos via um problema de otimização.

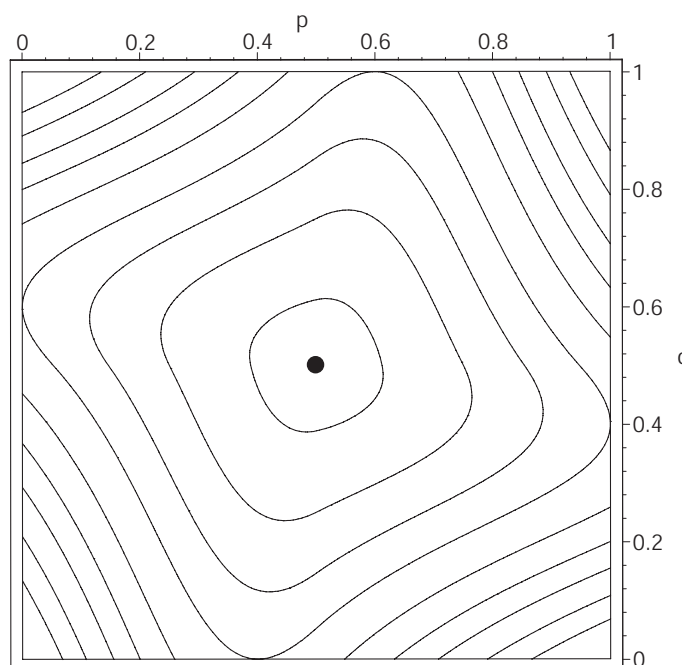
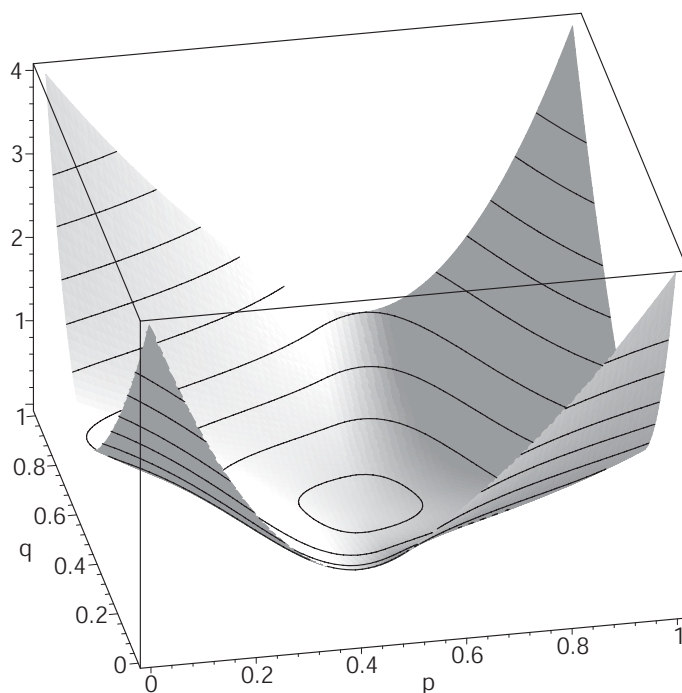


Figura 3.3: Encontrando os equilíbrios de Nash do jogo do item (d) do exemplo 1.4 via um problema de otimização.

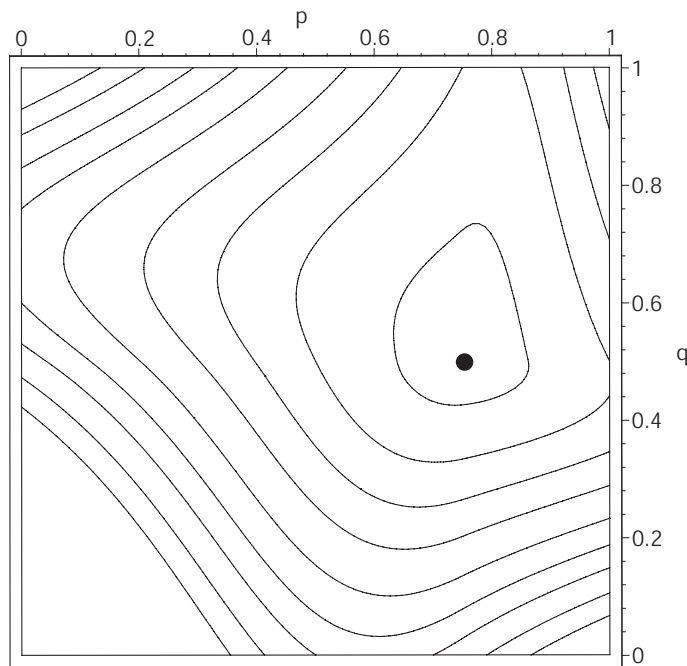
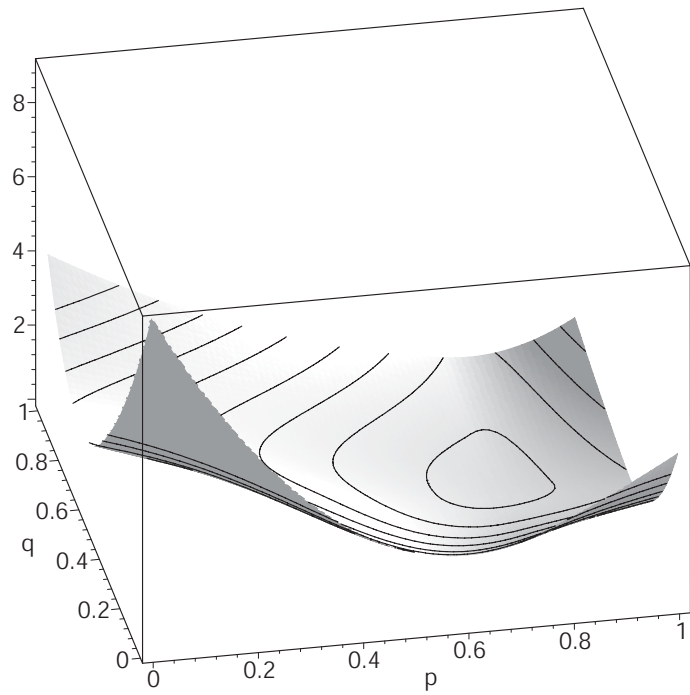


Figura 3.4: Encontrando os equilíbrios de Nash do jogo do exemplo 1.6 via um problema de otimização.

Capítulo 4

A forma extensa de um jogo

Como vimos, a forma normal é usada em situações onde os jogadores escolhem sua estratégia *simultaneamente* ou o fazem *sem conhecer a estratégia dos outros jogadores*.

Existem outras situações (como por exemplo no mundo dos negócios ou na política e em alguns jogos de cartas) em que os jogadores tomam suas decisões de forma seqüencial, depois de observar a ação que um outro jogador realizou. A forma extensa tem uma estrutura mais adequada para analisar jogos desta natureza, especificando assim quem se move, quando, com qual informação e o *payoff* ou ganho de cada jogador. Ela contém toda informação sobre um jogo.

Existem várias formas de se representar um jogo da forma extensa, todas elas tentando formalizar a idéia de *árvore*. Entre elas: (1) relações de ordem (algo mais familiar a um matemático), (2) teoria de grafos [9] e (3) alfabetos [8] (mais familiar a um cientista da computação). Usaremos aqui a abordagem de alfabetos e palavras.

4.1 Representação de um jogo via alfabetos e árvores

Um jogo na forma extensa consiste de um conjunto de jogadores

$$N = \{0, 1, 2, \dots, n\},$$

um conjunto das ações possíveis de cada jogador e os ganhos de cada um.

Definição 4.1 Chamamos de *alfabeto* a um conjunto de letras

$$\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}.$$

Denotamos por Σ^* ao conjunto de *palavras* que podem ser formadas pelos elementos do alfabeto Σ . Uma *árvore* sobre Σ é um conjunto $T \subseteq \Sigma^*$ de *nós* (palavras) $\omega \in \Sigma^*$ tal que, se $\omega = \omega'a \in T$ para algum $a \in \Sigma$, então $\omega' \in T$.

Exemplo 4.1 No jogo descrito na figura 4.1 existem quatro jogadores, um deles denominado “Natureza”.

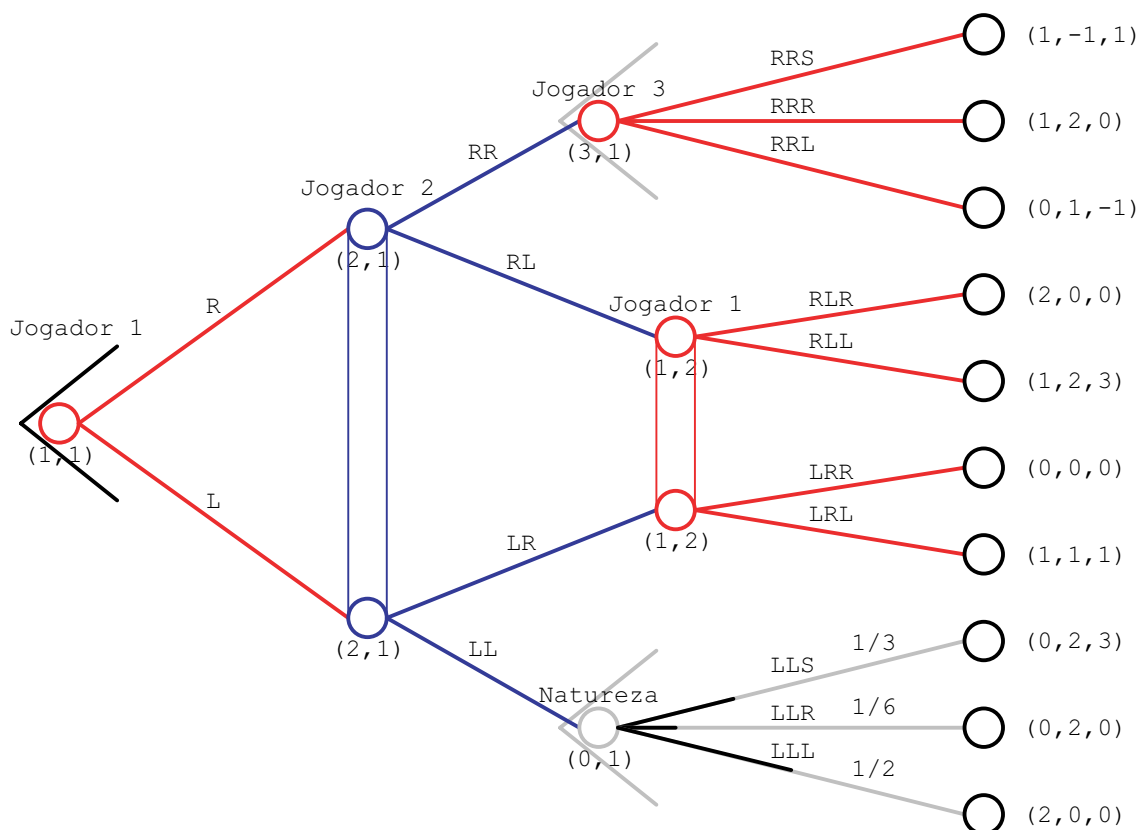


Figura 4.1: Um jogo descrito por uma árvore.

Representaremos este jogo usando o alfabeto $\Sigma = \{L, R, S\}$. O conjunto

de palavras correspondente a este alfabeto é:

$$\Sigma^* = \{\epsilon, L, R, S, LL, LR, LS, RL, RR, RS, SL, SS, SR, LLL, LLR, \dots\},$$

onde ϵ representa a “palavra vazia”, isto é, a palavra sem letra alguma. A árvore que representa este jogo é o conjunto:

$$T = \{\epsilon, L, R, LL, LR, RL, RR, LLL, LLR, \\ LLS, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR, RRS\}. \blacksquare$$

Note que a forma extensa traz várias informações sobre o jogo, como a vez que cada jogador joga, os movimentos disponíveis para cada um, os *payoffs* de cada um, etc. Para codificar estas informações, precisaremos de mais definições.

Definição 4.2 Dado um nó $\omega \in T$, definimos o conjunto dos *nós-filhos* de ω , denotado por $\text{ch}(\omega)$, como sendo o conjunto

$$\text{ch}(\omega) = \{\omega' \in T \mid \omega' = \omega a, \text{ para algum } a \in \Sigma\}$$

Exemplo 4.2 No jogo do exemplo 4.1, os nós-filhos de cada nó da árvore T são como se segue:

$$\begin{aligned} \text{ch}(\epsilon) &= \{L, R\}, & \text{ch}(L) &= \{LL, LR\}, & \text{ch}(R) &= \{RL, RR\}, \\ \text{ch}(LL) &= \{LLL, LLR, LLS\}, & \text{ch}(LR) &= \{LRL, RLR\}, \\ \text{ch}(RL) &= \{RLL, RLR\}, & \text{ch}(RR) &= \{RRL, RRR, RRS\}. \end{aligned} \blacksquare$$

Definição 4.3 Dado um nó $\omega \in T$, os *movimentos* (ou *ações*) disponíveis para ω são os elementos do conjunto

$$\text{Act}(\omega) = \{a \in \Sigma \mid \omega a \in T\}.$$

Exemplo 4.3 No jogo do exemplo 4.1, os movimentos de cada nó da árvore T são como se segue:

$$\begin{aligned} \text{Act}(\epsilon) &= \{L, R\}, & \text{Act}(L) &= \{L, R\}, & \text{Act}(R) &= \{L, R\}, \\ \text{Act}(LL) &= \{L, R, S\}, & \text{Act}(LR) &= \{L, R\}, \\ \text{Act}(RL) &= \{L, R\}, & \text{Act}(RR) &= \{L, R, S\}. \end{aligned}$$

Definição 4.4 Um *nó-folha* ou *nó terminal* $\omega \in T$ é um nó tal que $\text{ch}(\omega) = \emptyset$. Denotaremos o conjunto de nós folhas por

$$L_T = \{\omega \in T \mid \omega \text{ é nó folha}\}.$$

Exemplo 4.4 O conjunto dos nós-folhas L_T da árvore T do exemplo 4.1 é:

$$L_T = \{LLL, LLR, LLS, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR, RRS\}.$$

Existem nós que não são controlados por nenhum jogador. Em um nó deste tipo, nenhum dos jogadores toma decisões. O movimento a partir deste nó é definido por probabilidades, pela “sorte”. Ele representa, por exemplo, a situação em um jogo na qual se joga um dado ou uma moeda para decidir que movimento fazer ou qual jogador irá jogar. Este fator “sorte” é representado no jogo pelo *jogador natureza*. Usaremos a convenção de que $N = 0$ é o jogador natureza. Para cada nó do jogador natureza, $\omega \in \text{Pl}_0$, define-se uma *distribuição de probabilidade* $q_\omega: \text{Act}(\omega) \rightarrow \mathbb{R}$ sobre suas ações, isto é, define-se uma função q_ω de $\text{Act}(\omega)$ em \mathbb{R} que satisfaz as condições

$$q_\omega(a) \geq 0 \quad \text{e} \quad \sum_{a \in \text{Act}(\omega)} q_\omega(a) = 1.$$

Exemplo 4.5 No exemplo 4.1, se o jogador 1 escolhe L e o jogador 2 escolhe L , o próximo a “jogar” é o jogador “natureza”. Neste nó, a distribuição de probabilidades das jogadas possíveis é dada por:

$$\begin{aligned} q_{LL}: \text{Act}(LL) &\rightarrow \mathbb{R} \\ L &\mapsto q_{LL}(L) = 1/2 \\ R &\mapsto q_{LL}(R) = 1/6 \\ S &\mapsto q_{LL}(S) = 1/3 \end{aligned}$$

Definição 4.5 Denote por $\text{pl}: T - L_T \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ a função que associa a cada nó $\omega \in T - L_T$ o jogador $\text{pl}(\omega)$ cujo movimento está em ω . Assim,

$$\text{Pl}_i = \text{pl}^{-1}(i)$$

representa o conjunto de todos os nós onde o jogador i faz seu movimento.

Exemplo 4.6 No exemplo 4.1,

$$\begin{aligned} \text{pl}(\epsilon) = 1, \quad \text{pl}(L) = 2, \quad \text{pl}(R) = 2, \quad \text{pl}(LL) = 0, \\ \text{pl}(LR) = 1, \quad \text{pl}(RL) = 1, \quad \text{pl}(RR) = 3 \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \text{Pl}_1 = \text{pl}^{-1}(1) = \{\epsilon, LR, RL\}, \quad \text{Pl}_2 = \text{pl}^{-1}(2) = \{L, R\}, \\ \text{Pl}_3 = \text{pl}^{-1}(3) = \{RR\}, \quad \text{Pl}_0 = \text{pl}^{-1}(0) = \{LL\}. \end{aligned}$$

■

Definição 4.6 Uma *trajetória* (finita ou infinita) π em T é uma seqüência $\pi = \omega_0\omega_1\omega_2\cdots$ de nós $\omega_i \in T$ onde, se $\omega_{i+1} \in T$, então $\omega_{i+1} = \omega_i a$, para algum $a \in \Sigma$. A trajetória é *completa* (ou é uma *jogada*) se $\omega_0 = \epsilon$ (nó inicial) e se todo nó não-folha na trajetória π tem um nó-filho em π . Denotaremos o conjunto de todas as jogadas de T por ψ_T .

Exemplo 4.7 No exemplo 4.1, o conjunto ψ_T é

$$\psi_T = \{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7, \pi_8, \pi_9, \pi_{10}\},$$

onde as trajetórias são:

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\epsilon, L, LL, LLL), & \pi_2 &= (\epsilon, L, LL, LLR), \\ \pi_3 &= (\epsilon, L, LL, LLS), & \pi_4 &= (\epsilon, L, LR, LRL), \\ \pi_5 &= (\epsilon, L, LR, LRR), & \pi_6 &= (\epsilon, R, RL, RLL), \\ \pi_7 &= (\epsilon, R, RL, RLR), & \pi_8 &= (\epsilon, R, RR, RRL), \\ \pi_9 &= (\epsilon, R, RR, RRR), & \pi_{10} &= (\epsilon, R, RR, RRS). \end{aligned}$$

■

Definição 4.7 Um *conjunto informação* de um jogador i é um conjunto de nós tal que estes nós pertencem a um mesmo jogador i e os movimentos disponíveis são os mesmos para cada nó pertencente ao conjunto. Para cada jogador i , representaremos por

$$\text{info}_i: \text{Pl}_i \rightarrow \mathbb{N}$$

a função que associa a cada nó $\omega \in \text{Pl}_i$ um índice $\text{info}_i(\omega)$ para um conjunto de informações do jogador i . Assim,

$$\text{Info}_{i,j} = \text{info}^{-1}(j)$$

é o conjunto de nós do j -ésimo conjunto-informação para o jogador i . Logo, para quaisquer i, j e nós $\omega, \omega' \in \text{Info}_{i,j}$, $\text{Act}(\omega) = \text{Act}(\omega')$, ou seja, o conjunto de possíveis ações de todos os nós do mesmo conjunto-informação é o mesmo.

Exemplo 4.8 No exemplo 4.1,

$$\begin{array}{lll} \text{info}_1: \text{Pl}_1 \rightarrow \mathbb{N}, & \text{info}_2: \text{Pl}_2 \rightarrow \mathbb{N}, & \text{info}_3: \text{Pl}_3 \rightarrow \mathbb{N}. \\ \epsilon \mapsto 1 & L \mapsto 1 & RR \mapsto 1 \\ LR \mapsto 2 & R \mapsto 2 & \\ RL \mapsto 2 & & \end{array}$$

Assim, os conjuntos $\text{Info}_{i,j}$ formados pelos nós do j -ésimo conjunto-informação do jogador i são:

$$\text{Info}_{1,1} = \{\epsilon\}, \quad \text{Info}_{1,2} = \{LR, RL\}, \quad \text{Info}_{2,1} = \{L, R\}, \quad \text{Info}_{3,1} = \{RR\}.$$

■

Definição 4.8 Uma *função utilidade* para o jogador i é uma função real $u_i: \Psi_T \rightarrow \mathbb{R}$ definida no conjunto Ψ_T das jogadas completas. O valor de u_i em cada jogada de Ψ_T determina o *payoff* do jogador i para esta jogada.

Exemplo 4.9 As funções utilidades de cada jogador do exemplo 4.1 são:

$$\begin{array}{lll}
 u_1: \Psi_T \mapsto \mathbb{R}, & u_2: \Psi_T \mapsto \mathbb{R}, & u_3: \Psi_T \mapsto \mathbb{R}, \\
 \pi_1 \mapsto 2 & \pi_1 \mapsto 0 & \pi_1 \mapsto 0 \\
 \pi_2 \mapsto 0 & \pi_2 \mapsto 2 & \pi_2 \mapsto 0 \\
 \pi_3 \mapsto 0 & \pi_3 \mapsto 2 & \pi_3 \mapsto 3 \\
 \pi_4 \mapsto 1 & \pi_4 \mapsto 1 & \pi_4 \mapsto 1 \\
 \pi_5 \mapsto 0 & \pi_5 \mapsto 0 & \pi_5 \mapsto 0 \\
 \pi_6 \mapsto 1 & \pi_6 \mapsto 2 & \pi_6 \mapsto 3 \\
 \pi_7 \mapsto 2 & \pi_7 \mapsto 0 & \pi_7 \mapsto 0 \\
 \pi_8 \mapsto 0 & \pi_8 \mapsto 1 & \pi_8 \mapsto -1 \\
 \pi_9 \mapsto 1 & \pi_9 \mapsto 2 & \pi_9 \mapsto 0 \\
 \pi_{10} \mapsto 1 & \pi_{10} \mapsto -1 & \pi_{10} \mapsto 1
 \end{array}$$

onde $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{10}$ são as jogadas descritas no exemplo 4.7 na página 50. ■

Definição 4.9 Uma *estratégia pura* s_{ik} , para um jogador i em um jogo G na forma extensa é uma função $s_{ik}: \text{Pl}_i \rightarrow \Sigma$, que a cada nó ω do jogador i associa um movimento de modo que $s_{ik}(\omega) \in \text{Act}(\omega)$ e tal que se $\omega, \omega' \in \text{Info}_{i,j}$, então $s_{ik}(\omega) = s_{ik}(\omega')$. Assim, a função s_{ik} representa a k -ésima estratégia do jogador i , onde k varia de 1 até $|\Sigma^m|$, com $m = |\text{Pl}_i|$. Denotaremos por S_i o conjunto das estratégias puras para o jogador i .

Exemplo 4.10 Para o jogador 1 do exemplo 4.1 temos que

$$\text{Pl}_1 = \{\epsilon, LR, RL\}.$$

Considerando todas as combinações possíveis de movimentos para este jogador, temos 8 funções candidatas (descritas como conjuntos de pares ordenados):

$$\begin{array}{ll}
 s_{11} = \{(\epsilon, L), (LR, L), (RL, L)\}, & s_{12} = \{(\epsilon, L), (LR, L), (RL, R)\}, \\
 s_{13} = \{(\epsilon, L), (LR, R), (RL, L)\}, & s_{14} = \{(\epsilon, L), (LR, R), (RL, R)\}, \\
 s_{15} = \{(\epsilon, R), (LR, L), (LR, L)\}, & s_{16} = \{(\epsilon, R), (LR, L), (RL, R)\}, \\
 s_{17} = \{(\epsilon, R), (LR, R), (RL, L)\}, & s_{18} = \{(\epsilon, R), (LR, R), (RL, R)\}.
 \end{array}$$

Como a definição de estratégia pura impõe que $s_i(\omega) = s_i(\omega')$ sempre que $\omega, \omega' \in \text{Info}_{i,j}$, as funções $s_{12}, s_{13}, s_{15}, s_{16}$ e s_{17} são descartadas. Desta maneira, o conjunto S_1 das estratégias puras para o jogador 1 é

$$S_1 = \{s_{11}, s_{14}, s_{15}, s_{18}\}.$$

Da mesma maneira, para o jogador 2, temos que $\text{Pl}_2 = \{L, R\}$ e

$$S_2 = \{s_{21}, s_{24}\}, \quad \text{onde } s_{21} = \{(L, L), (R, L)\} \text{ e } s_{24} = \{(L, R), (R, R)\}.$$

Para o jogador 3, temos que $\text{Pl}_3 = \{RR\}$ e

$$S_3 = \{s_{31}, s_{34}, s_{33}\}, \quad \text{onde} \\ s_{31} = \{(RR, L)\}, s_{32} = \{(RR, R)\} \text{ e } s_{33} = \{(RR, S)\}.$$

Obtivemos, assim, $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ perfis de estratégias puras ao todo:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{21}, s_{31}), & \mathbf{s}_2 = (s_{11}, s_{21}, s_{32}), \\ \mathbf{s}_3 = (s_{11}, s_{21}, s_{33}), & \mathbf{s}_4 = (s_{11}, s_{24}, s_{31}), \\ \mathbf{s}_5 = (s_{11}, s_{24}, s_{32}), & \mathbf{s}_6 = (s_{11}, s_{24}, s_{33}), \\ \mathbf{s}_7 = (s_{14}, s_{21}, s_{31}), & \mathbf{s}_8 = (s_{14}, s_{21}, s_{32}), \\ \mathbf{s}_9 = (s_{14}, s_{21}, s_{33}), & \mathbf{s}_{10} = (s_{14}, s_{24}, s_{31}), \\ \mathbf{s}_{11} = (s_{14}, s_{24}, s_{32}), & \mathbf{s}_{12} = (s_{14}, s_{24}, s_{33}), \\ \mathbf{s}_{13} = (s_{15}, s_{21}, s_{31}), & \mathbf{s}_{14} = (s_{15}, s_{21}, s_{32}), \\ \mathbf{s}_{15} = (s_{15}, s_{21}, s_{33}), & \mathbf{s}_{16} = (s_{15}, s_{24}, s_{31}), \\ \mathbf{s}_{17} = (s_{13}, s_{24}, s_{32}), & \mathbf{s}_{18} = (s_{15}, s_{24}, s_{33}), \\ \mathbf{s}_{19} = (s_{18}, s_{21}, s_{31}), & \mathbf{s}_{20} = (s_{18}, s_{21}, s_{32}), \\ \mathbf{s}_{21} = (s_{18}, s_{21}, s_{33}), & \mathbf{s}_{22} = (s_{18}, s_{24}, s_{31}), \\ \mathbf{s}_{23} = (s_{18}, s_{24}, s_{32}), & \mathbf{s}_{24} = (s_{18}, s_{24}, s_{33}). \end{array}$$

■

Considere agora um vetor que representa um perfil de estratégias puras

$$\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n.$$

Se não houver nó pertencente ao jogador natureza (isto é, se $\text{Pl}_0 = \emptyset$), então s determina unicamente uma jogada π_s do jogo e os jogadores movem de acordo com suas estratégias seguindo o algoritmo:

- Tome um perfil de estratégias puras $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$.
- Faça $j = 0$ e $\omega_0 := \epsilon$
- Enquanto ω_j não é nó terminal, faça:
 - Se $\omega_j \in \text{Pl}_i$, então $\omega_{j+1} := \omega_j s_i(\omega_j)$
 - $j := j + 1$;
- $\pi_s = \omega_0 \omega_1 \dots$
- O caminho π encontrado tem que ser igual ao escolhido.

Se houver nó do jogador natureza, então $s \in S$ determina uma distribuição de probabilidade sobre as jogadas π do jogo. Para jogos da forma extensa finitos, isto é, jogos onde a árvore T é finita, é possível calcular explicitamente a probabilidade $p_s(\pi)$ de cada jogada π usando as probabilidades $q_\omega(a)$ através do seguinte algoritmo:

- Tome um perfil $s \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.
- Tome uma jogada $\pi = \omega_0 \dots \omega_m$ de T .
- Verifique se π é compatível com o perfil s , usando o algoritmo acima.
- Se π não for compatível com o perfil s , então $p_s(\pi) = 0$.
- Se π é compatível com o perfil s , então:
 - Se π não tem nó do jogador natureza, então $p_s(\pi) = 1$.
 - Se π tem nó do jogador natureza, então $p_s(\pi) = \prod_{k=1}^r q_{\omega_{j_k}}(a_{j_k})$.

Exemplo 4.11 O leitor não terá dificuldade de verificar que, através deste algoritmo, aplicado ao jogo do exemplo 4.1, s_4, s_5, s_6 determinam a jogada π_4 , s_{10}, s_{11}, s_{12} determinam a jogada π_5 , s_{13}, s_{14}, s_{15} determinam a jogada π_6 , s_{19}, s_{20}, s_{21} determinam a jogada π_7 , s_{16}, s_{22} determinam a jogada π_8 , s_{17}, s_{23} determinam a jogada π_9 e s_{18}, s_{24} determinam a jogada π_{10} . ■

OBSERVAÇÕES.

1. Se o caminho π_k não possui nó natureza, então o perfil de estratégia que é compatível com ele, determina unicamente a jogada π_k , ou seja, um perfil determina uma só jogada.

2. Se o caminho π_k possui nós natureza, então o perfil de estratégia determina uma distribuição de probabilidade sobre os $\pi_{k's}$ que são compatíveis com ele, ou seja, um perfil pode determinar mais de uma jogada.
3. No exemplo 4.1, $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_7, \mathbf{s}_8, \mathbf{s}_9$ determinam uma distribuição de probabilidade sobre π_1, π_2 e π_3 .

Definição 4.10 Para um jogo na forma extensa, dado um perfil puro $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$, podemos definir o *payoff esperado* para o jogador i sob \mathbf{s} como sendo o número

$$h_i(\mathbf{s}) = \sum_{\pi \in \Psi_T} p_{\mathbf{s}}(\pi) * u_i(\pi).$$

Exemplo 4.12 No jogo do exemplo 4.1,

$$\begin{aligned} h_1(\mathbf{s}_1) &= \sum_{\pi \in \Psi_T} p_{\mathbf{s}_1}(\pi) * u_1(\pi) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 = 1 \end{aligned}$$

e

$$h_1(\mathbf{s}_3) = \sum_{\pi \in \Psi_T} p_{\mathbf{s}_3}(\pi) * u_1(\pi) = 1. \quad \blacksquare$$

4.2 Conversão entre as formas normal e extensa

Todo jogo estratégico finito Γ pode ser convertido em um jogo na forma extensa G_Γ . Por exemplo, o jogo Pedra-Papel-Tesoura com dois jogadores, que é um jogo onde os jogadores escolhem suas estratégias simultaneamente, tem a seguinte matriz de *payoffs*:

		J_2		
		Pedra	Papel	Tesoura
J_1	Pedra	(0, 0)	(-1, 1)	(1, -1)
	Papel	(1, -1)	(0, 0)	(-1, 1)
	Tesoura	(-1, 1)	(1, -1)	(0, 0)

Neste jogo, o segundo jogador não sabe a estratégia do primeiro e vice-versa, portanto o conjunto de informações do segundo jogador possui três nós. A forma extensa deste jogo é a árvore da figura 4.2.

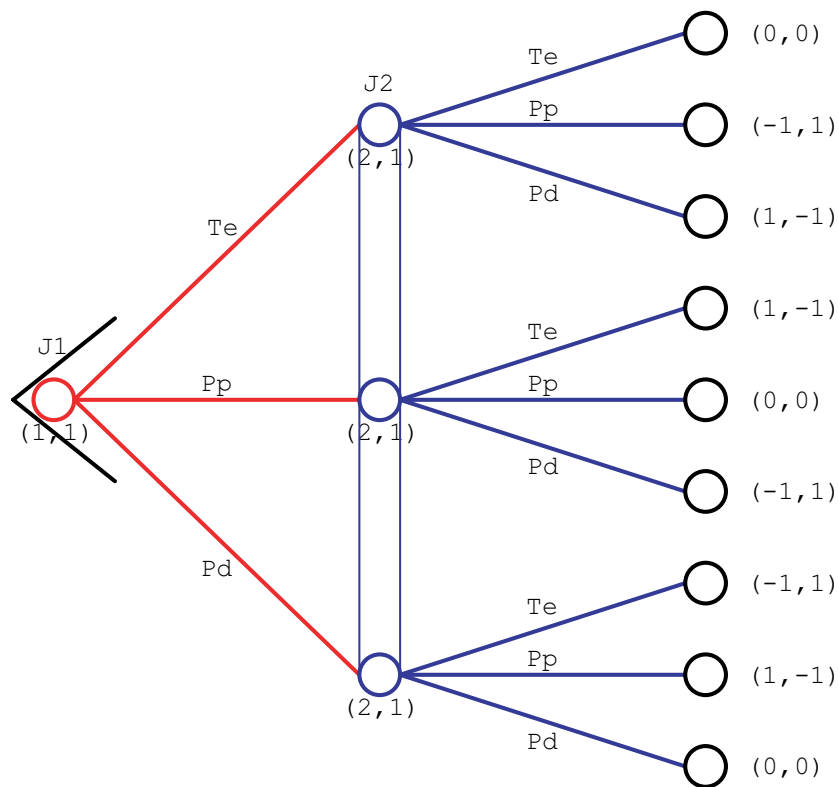


Figura 4.2: O jogo Pedra (Pd)-Papel (Pp)-Tesoura (Te).

Reciprocamente, todo jogo da forma extensa G pode ser visto como um jogo da forma estratégica Γ_G . Geralmente, o jogo na forma normal Γ_G fica muito maior do que na forma extensa. Para se ter uma idéia, se o jogador i possuir m nós na árvore, isto é, se $|Pl_i| = m$, então o número de estratégias

puras para um jogador i é, no pior caso, $|\Sigma|^m$. Note que se o jogo da forma extensa G é finito, ou seja, se a árvore é finita, então o jogo na forma normal é também finito. Realizamos a conversão da forma extensa G para a normal Γ_G da seguinte forma:

- (1) Em Γ_G , as estratégias para o jogador i são as aplicações $s_i \in S_i$.
- (2) Em Γ_G , definimos o *payoff* $u_i(s) := h_i(s)$, para todo perfil de estratégia pura s .

Vejamos como fica, na forma normal, o jogo na forma extensa do exemplo 4.1. Se o jogador 3 escolhe a estratégia s_{31} , temos a matriz:

		j_1			
		s_{11}	s_{14}	s_{15}	s_{18}
j_2	s_{21}	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(2, 0, 0)
	s_{24}	(1, 1, 1)	(0, 0, 0)	(0, 1, -1)	(0, 1, -1)

Se o jogador 3 escolhe a estratégia s_{32} , temos a matriz:

		j_1			
		s_{11}	s_{14}	s_{15}	s_{18}
j_2	s_{21}	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(2, 0, 0)
	s_{24}	(1, 1, 1)	(0, 0, 0)	(1, 2, 0)	(1, 2, 0)

Se o jogador 3 escolhe a estratégia s_{33} , temos a matriz:

		j_1			
		s_{11}	s_{14}	s_{15}	s_{18}
j_2	s_{21}	(1, 1, 1)	(1, 1, 1)	(1, 2, 3)	(2, 0, 0)
	s_{24}	(1, 1, 1)	(0, 0, 0)	(1, -1, 1)	(1, -1, 1)

Bibliografia

- [1] C. Bouton, *Nim, a Game with a Complete Mathematical Solution*. *Annals of Mathematics*, pp. 35-39, 1902.
- [2] E. R. Berlekamp, J. H. Conway e R. K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays, Vol. 2*. Academic Press, New York, 1984.
- [3] A. A. Cournot, *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*, 1838. Traduzido por N. T. Bacon em *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, McMillan, New York, 1927.
- [4] J. Conway, *All Games Brighth and Beautiful*. *The American Mathematical Monthly*, pp. 417–434, 1977.
- [5] J. Conway, *A Gamut of Game and Theories*. *Mathematics Magazine*, pp. 5–12, 1978.
- [6] J. Conway e R. Guy, *The Book of Numbers*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [7] J. Conway, *On Numbers and Games, Second Edition*. A. K. Peters, Natick, 2000.
- [8] K. Etessami, *Algorithmic Game Theory and Applications. Lecture Notes*, School of Informatics, The University of Edinburgh, Scotland, UK, 2004.
- [9] S. Hart, *Games in Extensive and Strategic Forms*. Capítulo 2 em *Handbook of Game Theory*, vol. 1, R. J. Aumann e S. Hart (editores), Elsevier Science Publishers, 1992.
- [10] C. H. Höning, *Aplicações da Topologia à Análise*. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1986.

-
- [11] D. Knuth, *Surreal Numbers*. Addison Wesley, 1974.
- [12] D. G. Luenberger, *Linear and Nonlinear Programming, Second Edition*. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [13] J. F. Nash Jr., *Equilibrium Points in n -person Games*. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, pp. 48–49, 1950.
- [14] J. F. Nash Jr., *Non-Cooperative Games*. PhD. Thesis. Princeton University Press, 1950.
- [15] J. F. Nash Jr., *The Bargaining Problem*. *Econometrica*, pp. 155–162, 1950.
- [16] J. F. Nash Jr., *Non-Cooperative Games*. *Annals of Mathematics*, pp. 286–295, 1951.
- [17] J. F. Nash Jr., *Two-person Cooperative Games*. *Econometrica*, pp. 128–140, 1953.
- [18] J. von Neumann. *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*. *Mathematische Annalen*, vol. 100, pp. 295–320. Traduzido por S. Bargmann: *On the Theory of Games of Strategy* em *Contributions to the Theory of Games*, vol. 4, pp. 13–42, A. W. Tucker e R. D. Luce (editores), Princeton University Press, 1959.
- [19] J. von Neumann e O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [20] R. Sprague, *Über Mathematische Kampfspiele*. *Tohoku Mathematical Journal*, pp. 438–441, 1935–1936.
- [21] E. Zermelo, *Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die theorie des Schachspiels*. *Atas do Décimo Quinto Congresso Internacional de Matemáticos*, vol. 2, pp. 501–504, 1913.