Notas de Aula
MatLab
Série, limite, equação diferencial

Routo Terada

www.ime.usp.br/~rt

Depto. C. da Computação - USP

Série de Taylor

$$x = x(v)$$

$$P_n(v) = a_0 + a_1(v - v_0) + a_2(v - v_0)^2 + \ldots + a_n(v - v_0)^n$$

$$a_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i x(v)}{dv^i}\Big|_{v=v_0}$$

Série de Taylor: taylor()

```
diff('exp(-x)',x)
ans = -exp(-x)
```

```
syms x;
grau=4;
seriezero=taylor(exp(-x),grau,0) % ordem ate´ grau-1, pto 0
```

```
seriezero = 1-x+1/2*x^2-1/6*x^3
```

Exercício: calcular a Série de Taylor das funções abaixo, de grau 3, no ponto zero

$$x^2 e^x \qquad x^2 \cos(x+2)$$

Série de Taylor: taylor()

```
serie1=taylor(exp(-x),grau,1) % pto 1
serie2=taylor(exp(-x),grau,2) % pto 2
serie3=taylor(exp(-x),grau,3) % pto 3
```

```
serie1 =
exp(-1)-exp(-1)*(x-1)+1/2*exp(-1)*(x-1)^2-1/6*exp(-1)*(x-1)^3

serie2 =
 exp(-2)-exp(-2)*(x-2)+1/2*exp(-2)*(x-2)^2-1/6*exp(-2)*(x-2)^3

 serie3 =
 exp(-3)-exp(-3)*(x-3)+1/2*exp(-3)*(x-3)^2-1/6*exp(-3)*(x-3)^3
```

Exercício: calcular a Série de Taylor das funções abaixo, de grau 3, no ponto 2

$$x^2 e^x \qquad x^2 \cos(x+2)$$

Série de Taylor: taylor()

```
diff('exp(-x*t)',x)
ans =-t*exp(-x*t)
```

```
diff('-t*exp(-x*t)',x)
ans =t^2*exp(-x*t)
```

```
syms x t;
serEMt=taylor(exp(-x*t),grau,x,0) % pto 0, var indep. t

serie0=taylor(x^5,4,0) % um exemplo de polinomio

% a seguir, geral
seriegeralzero=taylor('u(x)',x,4,0)
```

```
serEMt =
1-x*t+1/2*x^2*t^2-1/6*x^3*t^3

serie0 =0

seriegeralzero =
u(0)+D(u)(0)*x+1/2*`@@`(D,2)(u)(0)*x^2+1/6*`@@`(D,3)(u)(0)*x^3
```

Série de Taylor: taylor()

```
diff('exp(-x*t)',x)
ans =-t*exp(-x*t)

diff('-t*exp(-x*t)',x)
ans =t^2*exp(-x*t)
```

```
syms x t;
serieUM=taylor(exp(-x^t),4,x,1)
seriegeralUM=taylor('u(x)',4,x,1)
```

```
serieUM =
exp(-1)-exp(-1)*t*(x-1)+1/2*exp(-1)*t*(x-1)^2+exp(-1)*(1/6*t^3-1/3*t)*(x-1)^3

seriegeralUM =
u(1)+D(u)(1)*(x-1)+1/2*`@@`(D,2)(u)(1)*(x-1)^2+1/6*`@@`(D,3)(u)(1)*(x-1)^3
```

Série de Taylor em x+h

```
syms x t h; % calcular serie em x+h
serieCOMt=taylor(exp(-t),t,4) %grau 4-1
sMAISh=subs(serieCOMt,t,x+h) % substitui t por x+h
sZERO=subs(sMAISh,x,0) % substitui x por 0
sUM=subs(sMAISh,x,1)
```

```
serieCOMt =
1-t+1/2*t^2-1/6*t^3

sMAISh =
1-x-h+1/2*(x+h)^2-1/6*(x+h)^3

sZERO =
1-h+1/2*h^2-1/6*h^3

sUM =
-h+1/2*(1+h)^2-1/6*(1+h)^3
```

Limite

```
syms x
L1=limit((2*x+3)/(7*x+5),x,inf)
```

```
L1 =2/7
```

```
L2=limit( (1+1/x)^x,x,inf)
```

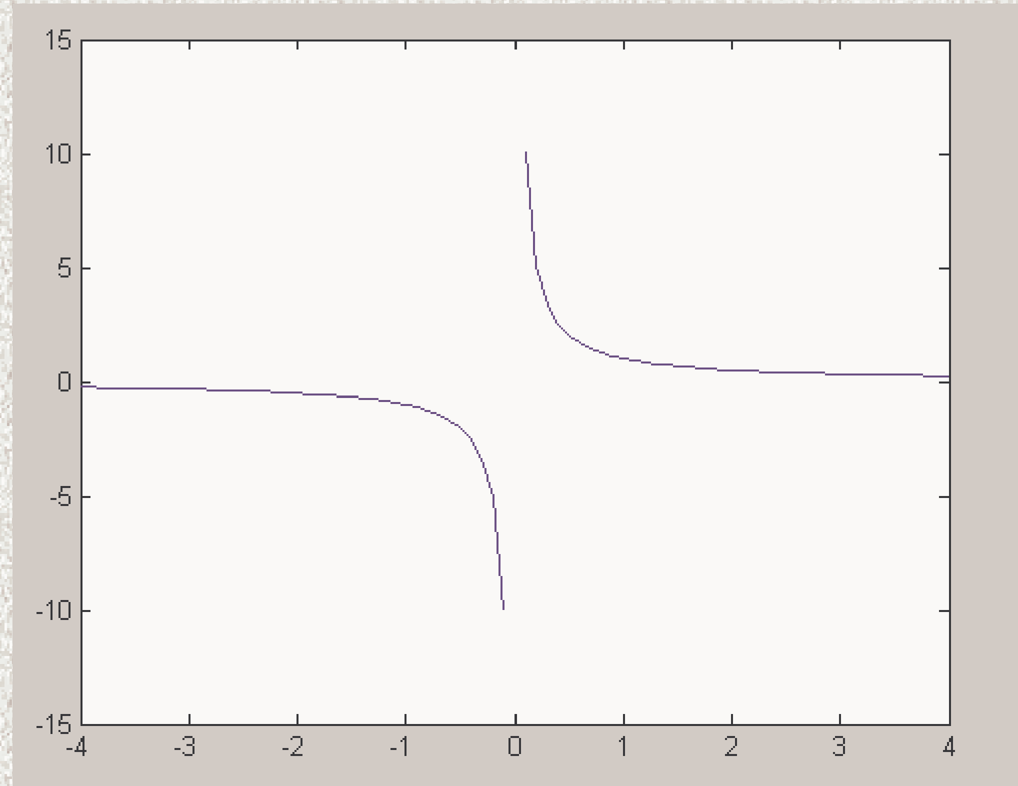
```
L2 =exp(1)
```

Lesq=limit(1/x,x,0,'left')

Ldir=limit(1/x,x,0,'right')

Lesq =-inf

Ldir =inf



Equações diferenciais

Solução de equações diferenciais com dsolve()

$$x''(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 1$$

```
>> Sol=dsolve('D2x+2*x=0', 'x(0)=0, Dx(0)=1')
```

```
Sol = 1/2*sin(t*2^(1/2))*2^(1/2)
```

```
                1/2    1/2
1/2 sin(t 2    ) 2
```

Solução de equações diferenciais com dsolve()

$$x''(t) + 2x(t) = 0, x(0) = 0, x(3) = 1$$

>> Sol2=dsolve('D2x+2*x=0', 'x(0)=0, x(3)=1')

Sol2 = -1/sin(2^(1/2))/(-3+4*sin(2^(1/2))^2)*sin(t*2^(1/2))

```
                       1/2
                 sin(t 2   )
          - -----------------------------
                1/2                1/2 2
          sin(2   ) (-3 + 4 sin(2   ) )
```

EXERCÍCIO Resolver as equações diferenciais a seguir (derivadas em relação a t):

- **(a)** $x'' + x = 0$
- **(b)** $x'' + x' + x = 0$
- **(c)** $x'' + x = 0,\ x(0) = 1, x'(0) = -1$
- **(d)** $x'' + x = \sin(2*t)$
- **(e)** $x'' + x = \sin(t)$

EXERCÍCIO Resolver as equações diferenciais a seguir:

$$\frac{dy}{dt}+2y=0,\ y(0)=3$$

Resposta:

$$y(t)=3e^{-2t}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=-mg,\ y(0)=h,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

Resposta:

$$y(t)=-\frac{1}{2}gt^2+h$$

h **é altura de lançamento de um corpo de massa *m*,**
g **é constante de gravidade**
Obs: corpo é lançado com velocidade zero

Verifique que a solução de:

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\frac{dy}{dt}$$

Resposta:

```
syms y c1 k t m g c2
y= c1*exp(-k*t/m)-m*g/k*t+c2
a=m*diff(y,2,t)+k*diff(y,t)+m*g
simplify(a)
```

é:

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k}t + c_2$$

Equação de Cauchy-Euler

$$t^2x'' - 2tx' + 3x = 0 \text{ (Cauchy-Euler)}$$

```
>> CEuler=dsolve('t^2*D2x-2*t*Dx+3*x=0')
>> pretty(CEuler)
```

```
CEuler =
C1*t^(3/2)*cos(1/2*3^(1/2)*log(t))+C2*t^(3/2)*sin(1/2*3^(1/2)*log(t))


          3/2          1/2                   3/2          1/2
     C1 t    cos(1/2 3    log(t)) + C2 t    sin(1/2 3    log(t))
```

Equação não-linear (Runge-Kutta)

A função `ode45()` permite resolver equações diferenciais pelo Método de Runge-Kutta. Exemplificamos a seguir com a resolução da seguinte equação não-linear de pêndulo forçado $x(t)$:

$$x'' + 0.1x' + sen(x) = -0.02\cos(t), x(0) = 0, x'(0) = 1$$

Primeiro convertemos esta equação para um sistema de equações de primeira ordem:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -0.1y - sen(x) - 0.02\cos(t) \\ x(0) = 0, y(0) = 1 \end{cases}$$

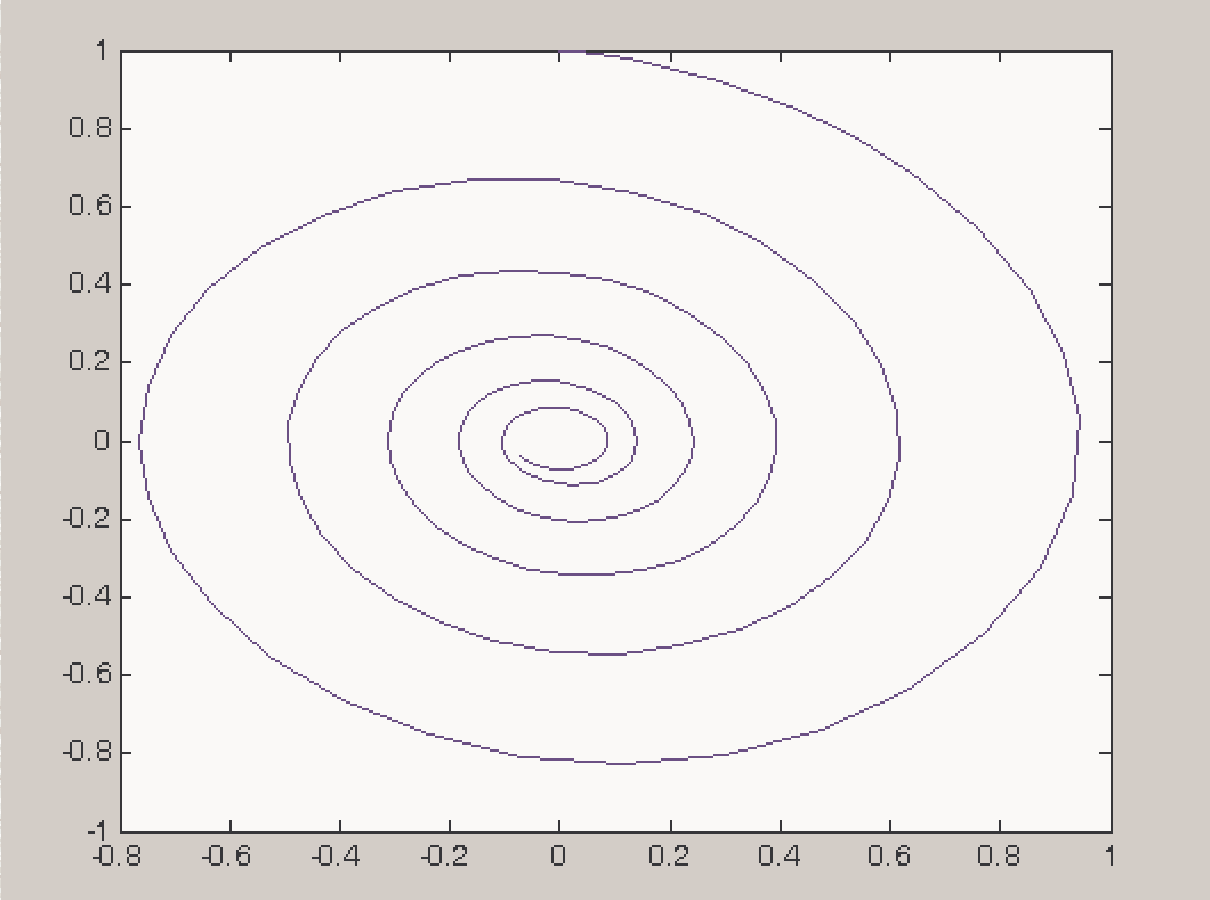
```
function [zaux]=pendulo(taux,z)
% instante taux (valor escalar
% vetor linha z tal que
%       z(1) representa x, e z(2) representa y=x'
% zaux calculado abaixo e' vetor coluna
zaux=[z(2); -0.1*z(2)-sin(z(1))-0.02*cos(taux)];
%       [ y  ;          y           x ]
```

Primeiro, definir arquivo pendulo.m, a ser usada a seguir.

```
>> [t w]=ode45('pendulo',[0 12*pi],[0 1]) % [0 12*pi] e' tempo,
>> plot(w(:,1),w(:,2))                      % [0 1] e' x(0) e y(0)
```

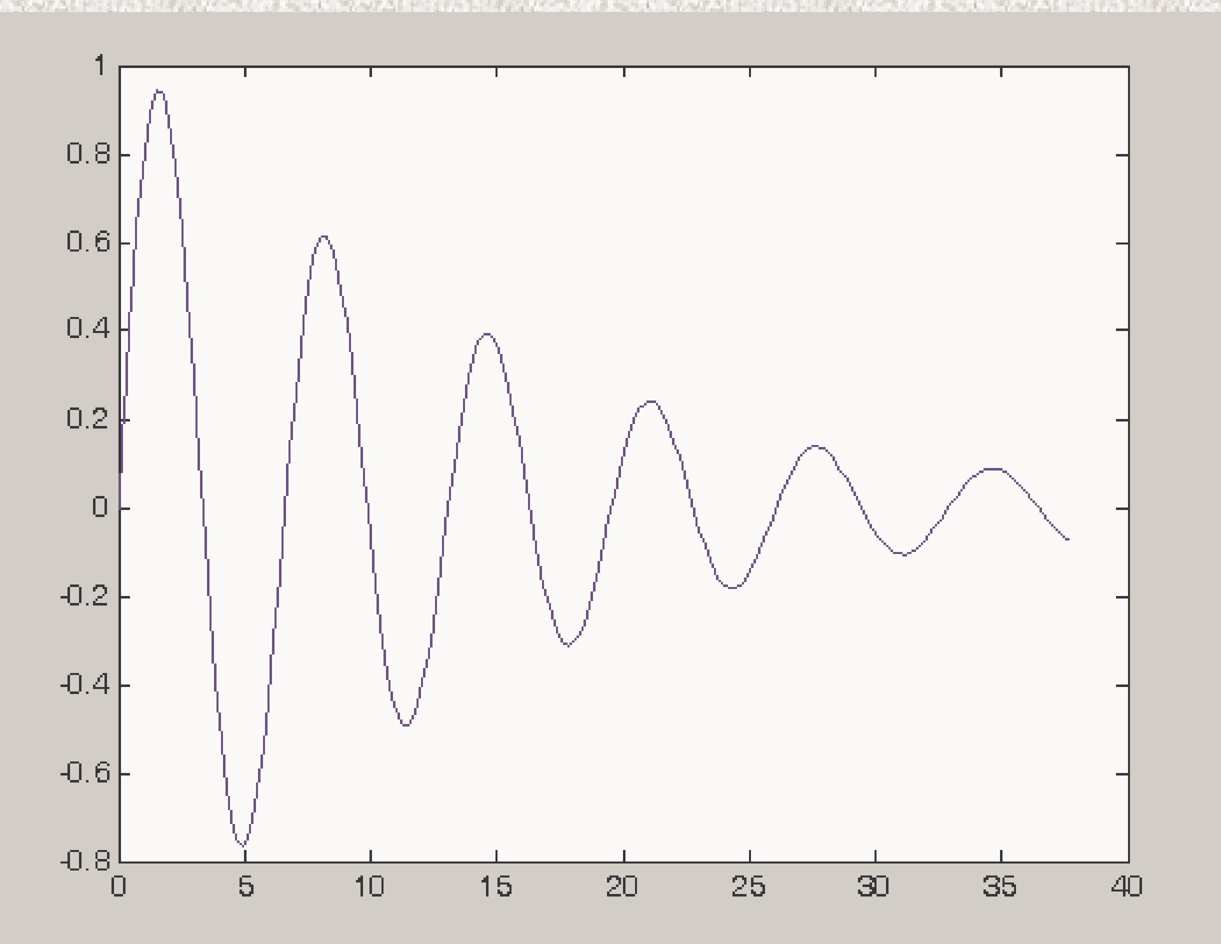
coluna w(:,1) contém valores de x, coluna w(:,2) contém valores de x’

Runge-Kutta



>> plot(t,w(:,1)) % gráfico de x versus t

Runge-Kutta



EXERCÍCIO Resolver as equações diferenciais não-lineares a seguir (derivadas em relação a t) aplicando Runge-Kutta:

(a) $x'' + 0.1x' + \sin(x) = 0, \ x(0) = 0, x'(0) = 1$

(b) $x'' + 0.1x' + \sin(x) = 0, x(0) = 0, x'(0) = 3$

Transformada de Laplace

Sendo $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty]$, a transformada de Laplace é definida como a integral abaixo, se a integral existir:

$$L[f](s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \lim_{M \to \infty} \int_0^{M} e^{-st} f(t) dt$$

```
syms t s;
f='exp(a*t)*exp(b*t)'; % define a funcao f(t)
lapla= laplace(f, t, s)
```

```
lapla = 1/(s-a-b)
```

Transformada de Laplace

Sendo $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty]$, a transformada de Laplace é definida como a integral abaixo, se a integral existir:

$$L[f](s) \equiv \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-st} f(t)dt$$

Transformada Inversa

```
syms t s;
lapla2= laplace('3*t+1', t, s)
invLapla= ilaplace(3/s^2+1/s)
```

```
lapla2 = 3/s^2+1/s
invLapla = 3*t+1
```

EXERCÍCIO Calcular a transformada de Laplace das funções:

(a) f(t)=exp(-a*t) com constante a>0 Resp 1/(s+a)
(b) f(t)=t^2 exp(t) Resp 2/(s-1)^3
(c) f(t)=t exp(-a*t) com constante a>0 Resp 1/(s+a)^2
(d) f(t)=exp(a*t) cos(b*t) com constantes a>0, b>0
Resp (s-a)/((s-a)^2+b^2)
(e) f(t)=exp(3*t) sin(2*t) Resp 2/((s-3)^2+4)
(f) f(t)=exp(-3*t) cos(2*t) Resp (s+3)/((s+3)^2+4)
(g) sqrt(t) Resp (1/2)*[pi^(1/2)]/[s^(3/2)]
(h) 1/sqrt(t) Resp (pi/s)^(1/2)
(i) t^(3/2) Resp (3/4)*[pi^(1/2)]/[s^(5/2)]

EXERCÍCIO Sendo cosh(t)=(exp(t)+exp(-t))/2 e sinh(t)=(exp(t)-exp(-t))/2, calcular a transformada de Laplace das funções:

(a) cosh(a*t) com constante a>0 Resp s/(s^2-a^2)
(b) sinh(a*t) com constante a>0 Resp a/(s^2-a^2)
(c) t*sinh(t)   Resp (2*a*s)/(s^2-a^2)^2

Transformada de Laplace permite converter uma equação diferencial em equação algébrica devido ao Teorema a seguir:

> **Se f é contínua em (0,inf), com derivada contínua por intervalos, satisfazendo:**
>
> **existe constante C tal que |f(t)|<=C exp(at), onde t>= a >0**
>
> **então L[f] existe para s>0 e:**
>
> **L[f']=sL[f]-f(0)**

Exemplo ilustrativo: resolver a eq. diferencial

x'+3x=0, x(0)=1

(sabemos que a solução é x(t)=exp(-3t))

Aplicando L[] sobre a eq. difer., pelo Teorema acima tem-se:

L[x']+3L[x]=0

sL[x]-x(0) +3L[x]=0

(s+3) L[x] -1=0

Logo L[x]=1/(s+3), e calculamos a inversa desta: x(t)=exp(-3t)

veja a seguir em MatLab

```
syms x t s laplax
EqDifer='diff(x(t),t)+3*x(t)' % define eq. difer.

% calcula transf. Laplace em funcao de s, integral em rel. a t
A=laplace(EqDifer,t,s)

% substitui 'laplace(x(t),t,s)' por laplax
A=subs(A,'laplace(x(t),t,s)',laplax)

% resolve A=0, com incognita laplax
C=solve(A,laplax)

% calcula inversa de laplace C
InvLapla=ilaplace(C,s,t)

% substitui 'x(0)' pela condicao x(0)=1
solFinal=subs(InvLapla,'x(0)',1)
```

```
EqDifer =diff(x(t),t)+3*x(t)

A =s*laplace(x(t),t,s)-x(0)+3*laplace(x(t),t,s)

A =s*laplax-x(0)+3*laplax

C =x(0)/(s+3)

InvLapla =x(0)*exp(-3*t)

solFinal =exp(-3*t)
```

Aplicação de Transformada de Laplace:

. Calcular $x(t)$ tal que : $x'' + 3x' + 2x = 0, x(0) = a,$
$x'(0) = b$ onde a e b são constantes.

Seja $X(s)$ a transformada de Laplace de $x(t)$:

$L[x(t)] = X(s).$

Então:

$$L[x'(t)] = sX(s) - x(0)$$

$$L[x''(t)] = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$$

Aplicando-se a Transformada de Laplace à equação diferencial acima, tem-se:

$$[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 3[sX(s) - x(0)] + 2X(s) = 0$$

ou seja:

```
syms x t s lapla a b
EqDif='diff(diff(x(t),t),t)+3*diff(x(t),t)+2*x(t)' % define eq. dif.
% calcula transf. Laplace em funcao de s, integral em rel. a t
LEqDif=laplace(EqDif,t,s)
% substitui 'laplace(x(t),t,s)' por lapla, x(0) por a e D(x)(0) por b
LEqDif=subs(LEqDif,'laplace(x(t),t,s)',lapla)
LEqDif=subs(LEqDif,'x(0)',a)
LEqDif=subs(LEqDif,'D(x)(0)',b)
% resolve LEqDif=0, com incognita lapla
C=solve(LEqDif,lapla)
% calcula inversa da transf. laplace de C
InvLapla=ilaplace(C,s,t)
% solFinal
```

```
EqDif =diff(diff(x(t),t),t)+3*diff(x(t),t)+2*x(t)
LEqDif =s*(s*laplace(x(t),t,s)-x(0))-D(x)(0)+3*s*laplace(x(t),t,s)-3*x(0)+2*laplace(x(t),t,s)
LEqDif =s*(s*lapla-x(0))-D(x)(0)+3*s*lapla-3*x(0)+2*lapla
LEqDif =s*(s*lapla-a)-D(x)(0)+3*s*lapla-3*a+2*lapla
LEqDif =s*(s*lapla-a)-b+3*s*lapla-3*a+2*lapla
C =(s*a+b+3*a)/(s^2+3*s+2)
InvLapla =-exp(-2*t)*b-exp(-2*t)*a+2*exp(-t)*a+exp(-t)*b
```

$$[s^2X(s) - sa - b] + 3[sX(s) - a] + 2X(s) = 0$$

$$(s^2 + 3s + 2)X(s) = as + b + 3a$$

$$X(s) = \frac{as + b + 3a}{s^2 + 3s + 2} = \frac{as + b + 3a}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{2a + b}{s+1} - \frac{a+b}{s+2}$$

A inversa da Transformada de Laplace de $X(s)$ nos dá:

$$x(t) = L^{-1}[X(s)] \quad = L^{-1}[\frac{2a+b}{s+1}] - L^{-1}[\frac{a+b}{s+2}]$$

$$= (2a+b)e^{-t} - (a+b)e^{-2t} \text{ para } t \geq 0$$

- Calcular $x(t)$ tal que:

$$x''(t) + 2x'(t) + 5x = 3,\ x(0) = 0,\ x'(0) = 0$$

Note que $L[3] = 3/s$, $x(0) = 0$, e $x'(0) = 0$, e a equação fica:

$$s^2X(s) + 2sX(s) + 5X(s) = \frac{3}{s}$$

Resolvendo para $X(s)$, tem-se:

$$X(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

e a inversa deste $X(s)$ é:

$$x(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t}\sin(2t) - \frac{3}{5}e^{-t}\cos 2t,\ \text{para } t \geq 0$$

```
syms x t s lapla
EqDif='diff(diff(x(t),t),t)+2*diff(x(t),t)+5*x(t)-3' % define eq. dif.

% calcula transf. Laplace em funcao de s, integral em rel. a t
LEqDif=laplace(EqDif,t,s)

% substitui 'laplace(x(t),t,s)' por lapla, x(0) por a e D(x)(0) por b
LEqDif=subs(LEqDif,'laplace(x(t),t,s)',lapla)
LEqDif=subs(LEqDif,'x(0)',0)
LEqDif=subs(LEqDif,'D(x)(0)',0)

% resolve LEqDif=0, com incognita lapla
C=solve(LEqDif,lapla)
pretty(C)
% calcula inversa da transf. laplace de C
InvLapla=ilaplace(C,s,t)
pretty(InvLapla)
```

EXERCÍCIO Resolver as equações a seguir, utilizando laplace(), transformada de Laplace, e ilaplace(), inversa da transformada de Laplace:

(a) x’+2*x=sin(t), x(0)=1
(b) x’-3*x=exp(-2*t), x(0)=-2
(c) 3x’+7*x=5*sin(t)+cos(t), x(0)=1

Se f é contínua em (0,inf), com derivada contínua por intervalos, satisfazendo:

existe constante C tal que $|f(t)| <= C \exp(at)$, onde $t >= a > 0$

então L[f] existe para s>0 e:

$$L[f'] = sL[f] - f(0)$$

Note que quando este Teorema pode ser aplicado duas vezes, obtém-se uma fórmula para $L[f''] = L[(f')'] = s^2 L[f] - s f(0) - f'(0)$

Exercícios:

(a) $x'' + 3x' + 2x = \sin(t)$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$

Resp.: $x(t) = 1/5 \exp(-2t) + 1/2 \exp(-t) - 3/10 \cos(t) + 1/10 \sin(t)$

(b) $x'' + 4x' + 3x = \exp(-t)$, $x(0) = x'(0) = 0$

Resp.: $¼ \exp(-3t) - 1/4 \exp(-t) + 1/2\, t \exp(-t)$

Convolução

Sejam $f()$ e $g()$ duas funções sobre um domínio comum $t > 0$. A convolução $f \boxtimes g$ de $f()$ e $g()$ é definida como

$$h(t) = (f \boxtimes g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

```
>> syms t s
>> Lt= laplace(t, t, s) % transformada de Laplace de t
>> Lt2= laplace(t^2, t, s) % transformada de Laplace de t^2
>> Lprod= Lt*Lt2  % produto das transformadas
>> InvLapla= ilaplace(Lprod)
```

```
Lt =1/s^2
Lt2 =2/s^3
Lprod =2/s^5
InvLapla =1/12*t^4
```

EXERCÍCIO Calcular a convolução das funções:

(a) t^2
(b) 1 * 1
(c) t * sin(t)
(d) sin(t) * sin(t)
(e) t * exp(t)
(f) t * cos(aT0 com constante a>0
(g) exp(2t) * sin(t)

Convolução

Sejam $f()$ e $g()$ duas funções sobre um domínio comum $t > 0$. A convolução $f \boxtimes g$ de $f()$ e $g()$ é definida como

$$h(t) = (f \boxtimes g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau.$$

Propriedade importante

$$L[f \boxtimes g] = L[f]\,L[g]$$

$$f \boxtimes g = L^{-1}[L[f]\,L[g]]$$

Esta propriedade permite converter o cálculo de convolução em produto de duas transformadas de Laplace

Por exemplo, $f(t) = t$ e $g(t) = t^2$, e $h(t) = (f \boxtimes g)(t) = \int_0^t (t-\tau)\tau^2 d\tau = \frac{1}{12}t^4$. Calculamos a seguir esta convolução usando `laplace()` e `ilaplace()`.

```
» syms t s
» Lt=laplace(t, t, s) % L[t]
Lt = 1/s^2
» Lt2=laplace(t^2, t, s) % L[t^2]
Lt2 = 2/s^3
» Lprod=Lt*Lt2 % L[t]L[t^2] % produto
Lprod = 2/s^5
» ilaplace(Lprod) % inversa do produto
ans = 1/12*t^4
```

Um outro exemplo a seguir:

$$\sin(t) \boxtimes \cos(2t) = \int_0^t \sin(t-\tau)\cos(2\tau)d\tau = \frac{1}{3}[\cos t - \cos(2t)]$$

```
» Lsen=laplace(sin(t), t, s)
Lsen = 1/(s^2+1)
» Lcos2=laplace(cos(2*t), t, s)
Lcos2 = s/(s^2+4)
» Lprod=Lsen*Lcos2
Lprod = 1/(s^2+1)*s/(s^2+4)
» ilaplace(Lprod)
ans = -1/3*cos(4^(1/2)*t)+1/3*cos(t)
```

O elemento identidade da operação de convolução, *i.e.*, a função $g()$ tal que $f \boxtimes g = f$ para toda $f()$, *não* é a função $g(t) = 1$. A função delta de Dirac, $\delta()$ é o elemento identidade:

$$(f \boxtimes \delta)(t) = \int_0^t f(t-\tau)\delta(\tau)d\tau = f(t)$$

11.4 Exercícios

1. Calcular a convolução das funções seguintes:

   (a) t^2

   (b) 1×1

   (c) $t \times \sin(t)$

   (d) $\sin(t) \times \sin(t)$

   (e) $t \times e^t$

   (f) $t \times \cos(at)$ com constante $a > 0$

   (g) $e^{2t} \times \sin(t)$