Integração e Raízes Unitárias

1. Ordem de Integração

$X_t \sim I(0)$: processo estacionário

(i) Var$(X_t) < \infty$, não depende de t;

(ii) a_t tem efeito temporário em X_t;

(iii) o processo cruza a origem após um tempo médio finito;

(iv) $\rho_k \to 0$, logo $\sum |\rho_k| < \infty$.

$X_t \sim I(1)$: primeira diferença estacionária; $X_0 = 0$

(i) Var$(X_t) \to \infty$, $t \to \infty$;

(ii) a_t tem efeito permanente no valor de X_t (este é uma soma de inovações passadas);

(iii) o tempo médio de retorno à origem é infinito;

(iv) $\rho_k \to 1$, $\forall k$, $t \to \infty$.

2. **Teste de Uma Raíz Unitária**

- Suponha $X_t = \phi X_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim N(0, \sigma^2)$, $X_0 = 0$.

$$\widehat{\phi}_{MQ} = \frac{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2}. \qquad (1)$$

Segue-se que

$$\widehat{\phi}_{MQ} - \phi = \frac{\sum X_{t-1} a_t}{\sum X_{t-1}^2}$$

(i) $|\phi| < 1 \Rightarrow \sqrt{T}(\widehat{\phi}_{MQ} - \phi) \sim N(0, (1-\phi)^2)$.
Com esse resultado, podemos testar hipóteses da forma $H_0 : \phi = \phi_0$.

(ii) **Mas** quando $\phi = 1$, a variância assintótica acima torna-se zero, ou seja, teremos uma **distribuição degenerada**.

(iii) Investigar propriedades de

$$\widehat{\phi}_{MQ} - 1 = \frac{\sum X_{t-1}a_t}{\sum X_{t-1}^2}. \qquad (2)$$

(iv) Se $\phi = 1$ obtemos o Passeio Casual,

$$X_t = \sum_{s=1}^{t} a_s \quad \Rightarrow \quad X_t \sim N(0, \sigma^2 t).$$

- Pode-se demonstrar que

$$T(\widehat{\phi}_{MQ} - 1) \to \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1)}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr}, \qquad (3)$$

onde $W(r)$ é *Movimento Browniano* padrão, isto é, $W(r) \sim N(0, r)$.

(i) Em particular $W(1) \sim \chi^2(1)$ e $P(\chi^2(1) < 1) = 0,68$, logo

$$P(T(\widehat{\phi}_{MQ} - 1) < 0) \to 0,68, \quad \text{para} \quad T \to \infty$$

Ou seja, em 2/3 das amostras geradas por um passeio casual, o estimador $\widehat{\phi}_{MQ}$ será menor do que 1.

(ii) Para testar $H_0 : \phi = 1$, usamos a estatística

$$t_\phi = \frac{\widehat{\phi}_{MQ} - 1}{(s_T^2 / \sum X_{t-1}^2)^{1/2}}, \qquad (4)$$

onde o denominador é o erro padrão de $\widehat{\phi}_{MQ}$ e s_T^2 é o EMQ de σ^2, ou seja,

$$s_T^2 = \frac{\sum_{t=1}^T (X_t - \widehat{\phi}_{MQ} X_{t-1})^2}{T - 1}.$$

A distribuição de t_ϕ não é normal, no limite, quando $\phi = 1$.

- A estatística pode ser re-escrita como

$$\tau = \frac{T^{-1} \sum_{t=1}^{T} X_{t-1} a_t}{s_T (T^{-2} \sum_{t=1}^{T} X_{t-1}^2)^{1/2}}. \qquad (5)$$

- Pode-se provar que

$$\tau \rightarrow \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2 - 1)}{(\int_0^1 [W(r)]^2 dr)^{1/2}}. \qquad (6)$$

Os testes usando (3) ou (6 são chamados testes de **Dickey-Fuller** (DF). Dickey and Fuller (1979, 1981).

Para efetivamente testar H_0, as distribuições (3) e (6) têm que ser tabuladas e valores críticos calculados; uso de Monte Carlo.

3. **Extensões do Teste DF**

- No caso anterior testamos Passeio Aleatório versus AR(1) com média zero.

  Modelo alternativo:

$$X_t = \theta_0 + \phi X_{t-1} + a_t \tag{7}$$

  A presença de θ_0 altera a distribuição da estatística. Teremos

$$T(\widehat{\phi}_{MQ}-1) \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2-1) - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\int_0^1 [W(r)]^2 dr - (\int_0^1 W(r)dr)^2}, \tag{8}$$

$$\tau_\mu \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}([W(1)]^2-1) - W(1)\int_0^1 W(r)dr}{\left[\int_0^1 [W(r)]^2 dr - (\int_0^1 W(r)dr)^2\right]^{1/2}} \tag{9}$$

- Estatísticas testam $H_0 : \phi = 1 \mid \theta_0 = 0$.

(i) Para testar $H_0 : \theta_0 = 0$, $\phi = 1$, usamos o teste de Wald.

$$\Phi = \frac{(\sum \Delta X_t^2 - \sum \hat{a}_t^2)/2}{\sum \hat{a}_t^2/(T-2)} \qquad (10)$$

(ii) $\sum \Delta X_t^2$: SQR restrita

$\sum \hat{a}_t^2 = \sum (X_t - \hat{\theta}_0 - \hat{\phi}_{MQ} X_{t-1})^2$: SQR irrestrita

Estatística **não** tem distribuição F; tabulada em DF(1981).

- **Generalização:** $X_t \sim AR(p)$

$$X_t = \theta_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i X_{t-i} + a_t \qquad (11)$$

(i) Re-escreva modelo como

$$\Delta X_t = \theta_0 + \phi_1^* X_{t-1} + \phi_2^* \Delta X_{t-1} + \ldots + \phi_p^* \Delta X_{t-p+1} + \varepsilon_t, \tag{12}$$

onde $\phi_1^* = \sum_{i=1}^{p} \phi_i - 1$, $\phi_j^* = -\sum_{i=j}^{p} \phi_i$, $j = 2, \ldots, p$.

(ii) Se o polinômio auto-regressivo $\phi(B)$ tiver uma raiz unitária, então $\phi(1) = 0$, ou seja $1 - \phi_1 - \phi_2 - \ldots - \phi_p = 0$, ou ainda, $\sum_{i=1}^{p} \phi_i = 1$ e portanto $\phi_1^* = 0$. Logo, testar a hipótese que o polinômio auto-regressivo tem uma raiz unitária é equivalente a testar a hipótese que $\phi_1^* = 0$.

(iii) Vemos que ϕ_1^* pode ser estimado como o coeficiente de X_{t-1} na regressão de mínimos quadrados de ΔX_t sobre 1,

$X_{t-1}, \Delta X_{t-1}, \ldots, \Delta X_{t-p+1}$.

(iv) Para T grande, as estatísticas $T(\hat{\phi}_1^* - 1)$ e $\hat{\tau}_\mu = \hat{\phi}_1^* / \widehat{\text{e.p.}}(\hat{\phi}_1^*)$ têm as mesmas distribuições assintóticas dadas em (8) e (9).

- Schwert (1989) propõe tomar

$$p\text{max} = \left[12 \left(\frac{T}{100} \right)^{1/4} \right]. \qquad (13)$$

(v) Enfoque alternativo: modificar a estatística τ_μ após a estimação do modelo, de modo a levar em conta os efeitos de erros auto-correlacionados e heterogeneidade de variância.

Phillips(1987) e Phillips e Perron (1988): usam a estatística $Z(\tau_\mu)$: tem a mesma distribuição limite de τ_μ, sob condições mais gerais.

- No caso de $X_t \sim$ ARMA(p,q), Said e Dickey (1985) provavaram que $\hat{\tau}_\mu$, obtida do modelo

$$\begin{aligned}\Delta X_t &= \theta_0 + \phi_1^* X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \phi_{i+1}^* \Delta X_{t-i} \\ &\quad + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j},\end{aligned}$$

com $k = p-1$, tem a mesma distribuição assintótica que $\widehat{\tau}_\mu$ obtida de (12). Aqui supomos p e q conhecidos e o lag k usualmente é escolhido como em (13).

4. **Caso com Tendência**

- Na seção 3 consideramos o modelo (7) e o teste $H_0 : \phi = 1$. É claro que uma hipótese equivalente a esta é

$$H_0 \ : \ \Delta X_t = \varepsilon_t, \tag{14}$$

onde $\varepsilon_t \sim$RB$(0, \sigma^2)$. Esta hipótese implica que a diferença de X_t é estacionária (X_t é "difference stationary"). A hipótese alternativa é $\phi < 1$ ou X_t é estacionário.

- Uma primeira extensão foi considerar adicionar ao modelo um termo constante, de modo que

$$H_0 \;:\; \Delta X_t = \theta_0 + \varepsilon_t. \tag{15}$$

  Uma possível alternativa a esta hipótese é supor que

$$H_1 \;:\; X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t, \tag{16}$$

  ou seja, X_t apresenta uma tendência determinística (o processo é "trend stationary").

- Para testar H_0 contra H_1 acima, temos que estender o procedimento anterior, de modo a incluir uma tendência linear em (12):

$$\Delta X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \phi_1^* X_{t-1} + \sum_{i=1}^{k} \phi_{i+1}^* \Delta X_{t-i} + \varepsilon_t, \tag{17}$$

com $k = p - 1$. A estatística para testar $H_0 : \phi_1^* = 0$ é

$$\hat{\tau}_\tau = \frac{\hat{\phi}^*_{1MQ} - 1}{\widehat{\text{e.p.}}(\hat{\phi}^*_{1MQ})}, \tag{18}$$

cuja distribuição limite é dada pelo resultado a seguir:

$$\hat{\tau}_\tau \xrightarrow{\mathcal{D}} \frac{1/2([W(1)]^2 - 1) - W(1)\int_0^1 W(r)dr + A}{[\int_0^1 [W(r)]^2 dr - (\int_0^1 W(r)dr)^2 + B]^{1/2}}, \tag{19}$$

em que

$$A = 12[\int_0^1 tW(t)dt - 1/2\int_0^1 W(t)dt][\int_0^1 W(t)dt$$

$$-1/2W(1)],$$

$$B = 12[\int_0^1 tW(t)dt \int_0^1 tW(t)dt - (\int_0^1 tW(t)dt)^2]$$

$$-3[\int_0^1 W(t)dt]^2.$$

5. **Exemplos**

1. UK spread $\sim AR(2)$ ou $I(1)$ sem "drift"

   $X_t = 0,045 + 1,182X_{t-1} - 0,219X_{t-2} + a_t$

   Ou, de modo equivalente,

$$X_t = 0,045 + 0,963 X_{t-1} + 0,219 \Delta X_{t-1} + a_t$$

Como $T = 526$, $\widehat{\phi}_{MQ} = 0,963 \ \rightarrow T(\widehat{\phi}_{MQ} - 1) = -19,5$, que é significativo a 2,5%. Também, $\tau_\mu = (0,963 - 1)/(0,011) = -3,52$, que é significativo a 1%.

Rejeitamos a hipótese nula $H_0 : \phi = 1 \ \Rightarrow$ AR(2) estacionário.

2. Taxa de câmbio USD/Libra . $\Delta X_t = a_t \rightarrow X_t \sim$ I(1). Aqui,

   $$\Delta X_t = 0,0015 - 0,00093 X_{t-1} + 0,071 \Delta X_{t-1} + a_t$$

   Com $T = 5192$, $T(\widehat{\phi}_{MQ} - 1) = -4,83$, $\tau_\mu = -1,79$, não significativas, logo *não rejeitamos a hipótese nula de raizes unitárias*.

3. $Y_t = D_t / P_t$ para UK All Share Index.

   $Y_t \sim ARMA(1,3)$.

   Padrão sugere I(1).

Como não temos certeza da ordem (p, q), consideramos o teste ADF com $k = [T^{0,25}] = [372^{0,25}] = 4$.

Obtemos $\tau_\mu = -3,86$, significativa a 1%.

Rejeitamos a hipótese nula de raiz unitária.

Ou seja, o processo é estacionário.

Estimando , $\hat{\phi} = 0,940$ (d.p.=0,017).

4. Suponha que X_t seja gerado por um processo ARIMA(1,1,0), com $X_0 = 0$, $\phi = 0,7$ e $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$.

   Hipótese de estacionariedade para a primeira diferença parece ser razoável. Em particular, a f.a.c.p. sugere um modelo AR(1) para ΔX_t, que estimado pelo SPlus resulta

   $\hat{\phi} = 0,716$, $\hat{\sigma}^2 = 0,982$, d.p.$(\hat{\phi}) = 0,0313$, Vamos testar a presença de uma raíz unitária. A f.a.c.p. da série original sugere um modelo AR(3), de modo que podemos considerar

$$\Delta X_t = \theta_0 + \phi_1^* X_{t-1} + \phi_2^* \Delta X_{t-1} + \phi_3^* \Delta X_{t-2} + \varepsilon_t. \tag{20}$$

A regressão de ΔX_t sobre $1, X_{t-1}, \Delta X_{t-1}$ e ΔX_{t-2} fornece o modelo ajustado

$$\Delta X_t = -0,094869 - 0,000275 X_{t-1}$$

$$+0,707155 \Delta X_{t-1} + 0,024766 \Delta X_{t-2},$$

onde os desvios padrões dos coeficientes estimados são, respectivamente, 0,093498, 0,0012, 0,045049 e 0,045093.

O valor da estatística do teste ADF é $\hat{\tau}_\mu = -0,2292$, logo aceitamos a hipótese de que há uma raíz unitária com o nível de significância $0,01$; o valor crítico é $-3,45$.

5. Ibovespa diário.

   A f.a.c.p. sugere um modelo AR(1) para a série.

   O valor da estatística de teste é $\hat{\tau}_\mu = -1,057312$, e aceitamos a hipótese nula, com o nível de $0,01$ (valor crítico $-3,4376$). Como a constante do modelo parece ser não significativa, podemos desconsiderá-la, e a estatística do teste tem valor $\hat{\tau} = 0,610074$, e novamente aceitamos a hipótese de existência de uma raiz unitária.

6. Série diária do Dow Jones, $T = 1992$.

   Usando a formulação (16), o coeficiente β_1 não foi significativo, o que nos leva a considerar o modelo com uma constante. Usando o S+FinMetrics, com $p = 6$, nota-se que os coeficientes dos lags de 2 a 6 não são significativos. Com $p = 1$ obtemos o valor $-2,021$ para a estatística e aceitamos a hipótese nula de raiz unitária. A aplicação do teste PP, também detecta raiz unitária na série.

6. Comentários

- Testes de raizes unitárias apresentam vários problemas, tais como:

  (a) baixo poder para discriminar processos estacionários persistentes ($|\phi|$ próximo de um) de processos não estacionários;

  (b) o poder diminui com a introdução de termos determinísticos ao modelo AR(1) básico sem constante. Veja Perron e Ng (1996) e Elliot et al. (1996) para sugestões que aliviam estes problemas.

- Vimos que podemos ter raizes unitárias também na parte de médias móveis de um modelo ARMA. Na realidade isto tem a ver com um teste de estacionariedade, onde a hipótese nula especifica que o processo é estacionário ao redor de uma tendência determinística ("trend-stationary") e a hipótese alternativa especifica que o processo é I(1). Para ilustrar, retomemos o modelo

$$X_t = \beta_0 + \beta_1 t + \varepsilon_t,$$

onde agora

$$\varepsilon_t = \phi\varepsilon_{t-1} + \eta_t,$$

sendo η_t ruido branco. Se $|\phi| < 1$, X_t será um processo "trend-stationary", ao redor de $\mu_t = \beta_0 + \beta_1 t$. Por outro lado, se $\phi = 1$, ε_t é passeio casual e X_t é um processo I(1) com "drift". Como

$$\begin{aligned} \Delta X_t &= \beta_1 + \Delta\varepsilon_t, \\ \Delta\varepsilon_t &= \phi\Delta\varepsilon_{t-1} + \eta_t - \eta_{t-1}, \end{aligned}$$

temos uma raiz unitária na representação ARMA de ΔX_t. Para detalhes sobre este teste veja Kviatkowski et al. (1992).