Probabilidade de Ruína e Processos de Lévy α-estáveis

Jhames Matos Sampaio

Universidade de São Paulo

IME - USP

08 de abril, 2010

Distribuições Estáveis e Processos de Lévy α-estáveis

Distribuições Estáveis e Processos de Lévy α-estáveis

1. Distribuições Estáveis
2. Processos de Lévy α-estáveis

Convergência Fraca e a Topologia de Skorohod

Convergência Fraca e a Topologia de Skorohod

Convergência Fraca e a Topologia de Skorohod

3. O espaço D
4. Topologia de Skorohod
5. Convergência Fraca

Convergência Fraca de Processos de Risco

Convergência Fraca de Processos de Risco

Convergência Fraca de Processos de Risco

6. Processos de risco e a Probabilidade de Ruína
7. Caso Clássico
8. Estudo realizado

Probabilidade da Ruína em Tempo Finito

Probabilidade da Ruína em Tempo Finito

Parte I

Distribuições Estáveis e Processos de Lévy α-estáveis

Distribuições Estáveis

Definição 1.1

Dizemos que uma variável aleatória X é estável se para $n \geq 2$, existe um número positivo c_n e um número real d_n tais que:

$$X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} c_n X + d_n,$$

onde as v.a.'s X_i's são cópias independentes de X.

Um teorema importante

Teorema 1.1

Seja X uma v.a. com distribuição F estável não degenerada e sejam $X_1, \cdots, X_n$ cópias independentes de X. Então,

(i) Existe $0 \leq \alpha \leq 2$ único tal que $c_n = n^{1/\alpha}$, isto é,

$S_n = X_1 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} n^{1/\alpha} X + d_n$.

(ii) Se $\alpha \neq 1$ existe um $b \in \mathbb{R}$ tal que $d_n = -b(n^{1/\alpha} - n)$ e b é tal que $X - b$ possui distribuição estritamente estável.

Ver Feller (1966)

Notação

Definição 1.2

Dizemos que X tem distribuição estável se existirem constantes $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$, $|\beta| \leq 1$ e μ tais que a função característica de X é dada por

$$\ln \Phi_X(t) = \begin{cases} it\mu - \sigma^\alpha |t|^\alpha \left[1 - i\beta sinal(t) \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right] & \text{se} \quad \alpha \neq 1, \\ it\mu - \sigma|t| \left[1 + i\beta sinal(t) \ln(t)\right] & \text{se} \quad \alpha = 1. \end{cases}$$

Notação

Em Breiman (1968), mostra-se que a definição acima é equivalente à Definição 1.1 e

Função sinal

$$sinal(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad t > 0, \\ 0 & \text{se} \quad t = 0, \\ -1 & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Notação

A Definição 1.2 motiva a notação $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ para indicar uma v.a. X com distribuição estável e parâmetros

$0 < \alpha \leq 2$: índice de estabilidade.

$\sigma > 0$: índice (parâmetro) de escala.

$|\beta| \leq 1$: parâmetro de assimetria ou viés.

μ: parâmetro de locação.

Processos de Lévy

Definição 1.3

Um processo estocástico $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ com valores em $\mathbb{R}^d$ é dito um processo de Lévy se :

(i) $P\{X(0) = 0\} = 1$ ou $X(0) = 0$ q.c.

(ii) X tem incrementos independentes.

(iii) X é temporalmente homogêneo, isto é, $X(t+h) - X(t) \stackrel{d}{=} X(h), \forall\ t > 0.$

(iv) X é estocasticamente contínua, isto é, $\lim_{t \to t_0} P\{|X(t) - X(t_0)| > \epsilon\} = 0.$

(v) Para quase todo ω, $X(t, \omega)$ é uma trajetória contínua à direita com limite à esquerda.

Processos de Lévy α-estáveis

Definição 1.4

Dizemos que $Z_\alpha = \{Z_\alpha(t) : t \leq 0\}$ é um processo (movimento) de Lévy α-estável se:

(i) $P\{Z_\alpha(0) = 0\} = 1$ ou $Z_\alpha(0) = 0$ q.c.

(ii) Z_α possui incrementos independentes.

(iii) $Z_\alpha(t+h) - Z_\alpha(t) \stackrel{d}{=} S_\alpha\left(\sigma h^{1/\alpha}, \beta, 0\right)$ para $0 \leq t, h < \infty$, onde $0 < \alpha \leq 2$, $\sigma > 0$ e $|\beta| \leq 1$.

Auto-Similaridade dos Processos de Lévy α-estáveis

Definição 1.5

Um processo X é dito auto-similar se dado $a > 0$ existir um $b > 0$ tal que

$$\{X_{at} : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{bX_t : t \geq 0\}.$$

Proposição 1.1

Todo processo Lévy α-estável é auto-similar, onde para todo $c > 0$

$$\{Z_\alpha(ct) : t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \left\{c^{1/\alpha} Z_\alpha(t) : t \geq 0\right\}.$$

Parte II

Convergência Fraca e a Topologia de Skorohod

O espaço D

O espaço $D = D[0, \infty)$ consiste das funções x em $[0, \infty)$ que são contínuas à direita e possuem limite à esquerda, em outras palavras:

(i) Para $t \in [0, \infty)$, $x(t^+) = \lim_{y \to t^+} x(y)$ existe e $x(t^+) = x(t)$.

(ii) Para $t \in [0, \infty)$, $x(t^-) = \lim_{y \to t^-} x(y)$ existe.

Métrica de Skorohod

Definição 2.1

Defina $d(x,y)$ como o ínfimo dos ϵ positivos para o qual existe em Λ (a classe das funções estritamente crescentes e contínuas de $[0,\infty)$ sobre $[0,\infty)$) um λ tal que

$$\sup_t |\lambda t - t| \leq \epsilon$$

e

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda t)| \leq \epsilon.$$

Covergência Fraca e em Probabilidade

Definição 2.2

Dado um espaço de probabilidade (Ω, Σ, P) dizemos que um conjunto $A \in \Sigma$ é P-contínuo se $P\{F_r(A)\} = 0$.

Definição 2.3

Dizemos que $\{P_n\}_{n \geq 1}$ converge fracamente para a probabilidade P se $P_n\{A\}$ convergir a $P\{A\}$ para todo A P-contínuo.

Convergência em termos de elementos aleatórios

Agora vamos definir a convergência em termos de elementos aleatórios, onde considerados os espaços (Ω, Σ, P), $(S, \mathbb{S})$ e variáveis aleatórias $X, X_n : \Omega \longrightarrow S$, definimos abaixo:

Definição 2.4

Dizemos que $X_n \xrightarrow{d} X$ se $P_{X_n} \xrightarrow{f} P_X$ onde $\forall A \in \mathbb{S}$, $P_X\{A\} = P\{X \in A\}$ e $P_{X_n}(A) = P\{X_n \in A\}$.

Teorema da Aplicação Contínua

Considere o espaço métrico $(S', \mathbb{S}')$ e os espaços já citados acima.

Teorema 2.1

Sejam $\{X_n\}_{n\geq 1}$ e X variáveis aleatórias e $h : S \to S'$ uma função mensurável. Seja $D(h)$ o conjunto dos pontos de descontinuidade de h e suponha $P\{X \in D(h)\} = 0$. Nessas condições se $X_n \xrightarrow{d} X$ então $h(X_n) \xrightarrow{d} h(X)$.

Ver Billingsley (1968)

Convergência em Probabilidade

Definição 2.5

Dizemos que $X_n \xrightarrow{p} X$ (converge em probabilidade) em $(S, \mathbb{S})$ se dado $\epsilon > 0$, $P\{\rho(X_n, X) \geq \epsilon\} \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.

ρ é a métrica associada ao espaço referido. Quando nos referirmos à convergência em probabilidade na topologia de Skorohod, a métrica associada será a métrica de Skorohod.

Parte III

Convergência Fraca de Processos de Risco

O que é um processos de risco?

Definição 3.1

Um processo de risco ou de reserva $R = \{R(t) : t \geq 0\}$ é um processo estocástico dado por

$$R(t) = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Y_k.$$

Supomos que a v.a. Y_k é não-negativa, $u > 0$ e $c > 0$ tal que $ct > E\left(\sum_{k=1}^{N(t)} Y_k\right)$.

O Tempo de Ruína

Definição 3.2

Dado um processo de risco $R = \{R(t) : t \geq 0\}$ definimos o tempo de ruína associado ao processo $R(t)$ por

$$T(R) = \inf\{t : t > 0, R(t) < 0\},$$

se $\{t : t > 0, R(t) < 0\} \neq \emptyset$ e $T(R) = \infty$ caso contrário.

A Probabilidade de Ruína

Definição 3.3

Definimos a probabilidade de ruína associada ao processo $R(t)$ por

$$P\{T(R) < \infty\}.$$

Quais as condições no caso clássico?

- N é um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$.
- N é independente do Processo $\{Y_k\}$.
- Em um caso particular podemos tomar as indenizações Y_k com distribuição exponencial de parâmetro $\delta > \lambda$.

Quais as condições no caso clássico?

- N é um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$.
- N é independente do Processo $\{Y_k\}$.
- Em um caso particular podemos tomar as indenizações Y_k com distribuição exponencial de parâmetro $\delta > \lambda$.

Quais as condições no caso clássico?

- N é um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$.
- N é independente do Processo $\{Y_k\}$.
- Em um caso particular podemos tomar as indenizações Y_k com distribuição exponencial de parâmetro $\delta > \lambda$.

Quais as condições no caso clássico?

- N é um processo de Poisson com parâmetro $\lambda > 0$.
- N é independente do Processo $\{Y_k\}$.
- Em um caso particular podemos tomar as indenizações Y_k com distribuição exponencial de parâmetro $\delta > \lambda$.

Qual a probabilidade de ruína no caso clássico?

No caso clássico, $N(.)$ processo de Poisson e $E(e^{tY_k}) < \infty$ para algum $t > 0$, temos a desigualdade de Lundberg, ver Asmussen (2000),

Desigualdade de Lundberg

$$P\{T(R) < \infty\} \leq e^{-\gamma u}, \tag{1}$$

onde $\gamma > 0$ é o coeficiente de ajuste.

Caso clássico com indenizações exponenciais

No caso clássico com indenizações exponenciais a probabilidade de ruína é conhecida, ver Asmussem (2000), e é dada por:

Probabilidade de Ruína com indenizações exponenciais

$$P\left\{\inf_{t\geq 0} R(t) < 0\right\} = \frac{\lambda}{\delta}\exp[-(\delta-\lambda)u].$$

Ruína em tempo finito

A ruína em tempo finito é a probabilidade do tempo de ruína ser menor que um valor finito e temos assim a distribuição do tempo de ruína:

Probabilidade de ruína em tempo finito

$$P\{T(R) \leq t\}.$$

Para Y_k's exponencialmente distribuídas com a exponencial padrão e para o processo de Poisson com taxa $\lambda < 1$ também é conhecida.

Ruína em tempo finito

Ruína em tempo finito

$$P\{T(R) \leq t\} = \lambda e^{-(1-\lambda)u} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_1(\theta)f_2(\theta)}{f_3(\theta)}d\theta, \qquad (2)$$

onde

$$f_1(\theta) = \lambda \exp[2\sqrt{\lambda}t\cos\theta - (1+\lambda)t + u(\sqrt{t}\cos\theta - 1)],$$

$$f_2(\theta) = \cos(u\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \cos(u\sqrt{\lambda}\,\mathrm{sen}\,\theta + 2\theta),$$

$$f_3(\theta) = 1 + \lambda - 2\sqrt{\lambda}\cos\theta.$$

Ver Asmussen (2000).

Situações práticas

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito.
- O valor das indenizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indenizações possuem cauda pesada.
- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

Situações práticas

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito.
- O valor das indenizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indenizações possuem cauda pesada.
- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

Situações práticas

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito.
- O valor das indenizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indenizações possuem cauda pesada.
- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

Situações práticas

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito.
- O valor das indenizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indenizações possuem cauda pesada.
- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

Situações práticas

- Queremos limitantes superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito.
- O valor das indenizações não possuem segundo momento finito.
- Portanto o valor das indenizações possuem cauda pesada.
- O estudo da probabilidade de ruína requer outras técnicas.

O que fazemos nessas situações?

- Furrer, Michna e Weron (1997), *Stable Lévy motion aproximation in collective risk theory*. Insurance: Mathematics and Economics 20, 97-114.
- Estudamos a probabilidade de ruína via aproximação de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ por processos Lévy α-estáveis, com $1 < \alpha < 2$.

O que fazemos nessas situações?

- Furrer, Michna e Weron (1997),

  Stable Lévy motion aproximation in collective risk theory.

  Insurance: Mathematics and Economics 20, 97-114.

- Estudamos a probabilidade de ruína via aproximação de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ por processos Lévy α-estáveis, com $1 < \alpha < 2$.

O que fazemos nessas situações?

- Furrer, Michna e Weron (1997),

  Stable Lévy motion aproximation in collective risk theory.

  Insurance: Mathematics and Economics 20, 97-114.

- Estudamos a probabilidade de ruína via aproximação de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ por processos Lévy α-estáveis, com $1 < \alpha < 2$.

Como obter os limitantes?

- Primeiramente mostramos que $Q^{(n)}(t) \xrightarrow{f} Q(t)$.
- Mostramos em seguida que o funcional T é quase certamente contínuo e $T(Q^{(n)}) \xrightarrow{f} T(Q)$.
- Consequentemente

$$\lim_{n \to \infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

- Obtemos os limitantes.

Como obter os limitantes?

- Primeiramente mostramos que $Q^{(n)}(t) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Q(t)$.
- Mostramos em seguida que o funcional T é quase certamente contínuo e $T(Q^{(n)}) \stackrel{f}{\Longrightarrow} T(Q)$.
- Consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

- Obtemos os limitantes.

Como obter os limitantes?

- Primeiramente mostramos que $Q^{(n)}(t) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Q(t)$.
- Mostramos em seguida que o funcional T é quase certamente contínuo e $T(Q^{(n)}) \stackrel{f}{\Longrightarrow} T(Q)$.
- Consequentemente

$$\lim_{n \to \infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

- Obtemos os limitantes.

Como obter os limitantes?

- Primeiramente mostramos que $Q^{(n)}(t) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Q(t)$.
- Mostramos em seguida que o funcional T é quase certamente contínuo e $T(Q^{(n)}) \stackrel{f}{\Longrightarrow} T(Q)$.
- Consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

- Obtemos os limitantes.

Como obter os limitantes?

- Primeiramente mostramos que $Q^{(n)}(t) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Q(t)$.
- Mostramos em seguida que o funcional T é quase certamente contínuo e $T(Q^{(n)}) \stackrel{f}{\Longrightarrow} T(Q)$.
- Consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

- Obtemos os limitantes.

A sequência de processos adotada.

Considere a sequência de processos de risco $\{Q^{(n)}\}$ dada por:

Sequência de processos de risco.

$$Q^{(n)}(t) = u^{(n)} + c^{(n)}t - \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k^{(n)}, \qquad t \geq 0. \tag{3}$$

Como as sequências $u^{(n)}$ e $c^{(n)}$ são determinísticas, na busca de um processo limite Q é natural a hipótese $u^{(n)} \to u > 0$ e $c^{(n)} \to c > 0$.

Por que processos Lévy α-estáveis?

Teorema do Limite Central

Sejam as v.a.'s Y_k i.i.d.'s com distribuição qualquer,

$E(Y_k) = \mu < \infty$ e $0 < var(Y_k) = \sigma^2 < \infty$, então

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \xrightarrow{f} N(0,1). \tag{4}$$

Por que processos Lévy α-estáveis?

Sendo $B(1) \stackrel{d}{=} N(0,1)$, a convergência (4) sugere que

Processo de Lévy α com parâmetro 1

$$\frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{n} (Y_k - \mu) \stackrel{f}{\Longrightarrow} Z_\alpha(1), \tag{5}$$

onde $Z_\alpha(1)$ tem distribuição estável com índice de estabilidade $1 < \alpha < 2$ e $\{\phi(n)\}$ são constantes normalizantes.

Um caso particular

No caso particular de $\alpha = 2$ temos $\phi(n) = n^{1/2}\sigma$ e a noção de divisibilidade infinita, juntamente com o Teorema de Donsker, indica que se $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$, então nossa sequência dada em (3) converge fracamente para

Processo limite

$$Q(t) = u + ct - B(t).$$

O que faremos nesse trabalho?

- Supomos $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.d.d. com média μ.
- Assumimos a ocorrência de (5).
- A função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.
- Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$.

O que faremos nesse trabalho?

- Supomos $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.d.d. com média μ.
- Assumimos a ocorrência de (5).
- A função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.
- Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$.

O que faremos nesse trabalho?

- Supomos $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.d.d. com média μ.
- Assumimos a ocorrência de (5).
- A função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.
- Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$.

O que faremos nesse trabalho?

- Supomos $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.d.d. com média μ.
- Assumimos a ocorrência de (5).
- A função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.
- Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$.

O que faremos nesse trabalho?

- Supomos $Y_k^{(n)} = Y_k/\phi(n)$ onde, novamente, $\{Y_k\}$ é uma sequência de v.a.'s i.d.d. com média μ.
- Assumimos a ocorrência de (5).
- A função ϕ será dada por $\phi(n) = n^{1/\alpha}L(n)$ onde L cresce lentamente para o infinito, ou seja, $L(n)n^{-\delta}$ converge a 0 para todo $\delta > 0$.
- Se não explicitado anteriormente, assumimos pelo restante do trabalho que $1 < \alpha < 2$.

Qual o processo limite nesse caso?

Vamos mostrar que a sequência dada em (3), nas condições dadas acima, converge fracamente para o processo de risco $Q = \{Q(t) : t \geq 0\}$ dado por

Processo limite

$$Q(t) = u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t) \tag{6}$$

onde, novamente, u e c são constantes positivas e $\{Z_\alpha(t) : t \geq 0\}$ é um processo de Lévy α-estável; a constante positiva λ será explicitada no Teorema 3.1.

Processo pontual no trabalho

Diferentemente do caso clássico não supomos $N^{(n)}$ um processo de Poisson em (3), veremos adiante que este pode ser um processo de renovação arbitrário:

$$N(t) = \max\left\{n : \sum_{k=1}^{n} T_k \leq t\right\},$$

onde assumimos que os tempos entre chegadas $(T_k : k \in \mathbb{N})$ são v.a.'s i.i.d.'s positivas.

Teorema 3.1

Seja a sequência $(Y_k : k \in \mathbb{N})$ como acima e considere $(N^{(n)} : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de processos pontuais tais que

$$\frac{N^{(n)} - \lambda n t}{\phi(n)} \xrightarrow{p} 0, \qquad n \to \infty, \tag{7}$$

na topologia de Skorohod para alguma constante positiva λ. Assuma também que para $E[Y_k] = \mu$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \left(c^{(n)} - \lambda n \frac{\mu}{\phi(n)} \right) = c, \qquad \lim_{n\to\infty} u^{(n)} = u. \tag{8}$$

Então

$$u^{(n)} + c^{(n)} t - \frac{1}{\phi(n)} \sum_{k=1}^{N^{(n)}(t)} Y_k \overset{f}{\Longrightarrow} u + ct - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(t), \qquad n \to \infty, \tag{9}$$

na topologia de Skorohod.

Parte IV

Limitantes para a Probabilidade de Ruína em Tempo Finito

Aproximação do Tempos de Ruína

Mostramos que temos a convergência fraca

$$T(Q^{(n)}) \overset{f}{\Longrightarrow} T(Q)$$

e também a aproximação para a probabilidade a tempo finito

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\}.$$

Teorema 4.1

Seja T o tempo de ruína definido na Definição 3.2. Se $Q^{(n)} \Rightarrow Q$ onde Q é dado em (6), então

$$T(Q^{(n)}) \Rightarrow T(Q). \tag{10}$$

Mais ainda,

$$\lim_{n\to\infty} P\{T(Q^{(n)}) \leq t\} = P\{T(Q) \leq t\} \tag{11}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q^{(n)}(s) < 0\right\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\inf_{0\leq s\leq t} Q(s) < 0\right\}. \tag{12}$$

9 Aproximação dos Tempos de Ruína

10 Ruína em Tempo Finito

O que faremos nessa seção?

- Estabelecemos cotas superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito, $P\{T(Q) \leq t\}$.
- Primeiro para movimentos de Lévy α-estáveis simétricos.
- Em seguida para movimentos de Lévy α-estáveis arbitrários.

O que faremos nessa seção?

- Estabelecemos cotas superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito, $P\{T(Q) \leq t\}$.
- Primeiro para movimentos de Lévy α-estáveis simétricos.
- Em seguida para movimentos de Lévy α-estáveis arbitrários.

O que faremos nessa seção?

- Estabelecemos cotas superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito, $P\{T(Q) \leq t\}$.
- Primeiro para movimentos de Lévy α-estáveis simétricos.
- Em seguida para movimentos de Lévy α-estáveis arbitrários.

O que faremos nessa seção?

- Estabelecemos cotas superiores para a probabilidade de ruína a tempo finito, $P\{T(Q) \leq t\}$.
- Primeiro para movimentos de Lévy α-estáveis simétricos.
- Em seguida para movimentos de Lévy α-estáveis arbitrários.

Lema 4.1

Seja $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ com $1 < \alpha < 2$. Então

$$\begin{cases} \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X > \lambda\} = C_\alpha \dfrac{1+\beta}{2}\sigma^\alpha, \\ \lim_{\lambda\to\infty} \lambda^\alpha P\{X < -\lambda\} = C_\alpha \dfrac{1-\beta}{2}\sigma^\alpha. \end{cases}$$

A constante C_α é dada por

$$C_\alpha = \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha)\cos(\pi\alpha/2)}$$

Ver Samorodnitsky e Taqqu (1994).

Primeira Aproximação

Proposição 4.1

Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com parâmetro de assimetria $-1 < \beta < 1$. Então

$$P\{T(u+cs-\lambda^{1/\alpha}Z_\alpha(s)) \leq t\} \sim C_\alpha \frac{1+\beta}{2}\lambda t(u+ct)^{-\alpha}, \qquad u \to \infty.$$

Para duas funções f e g, vamos usamos a notação $f \sim g$ para indicar que $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$.

Limitantes para o caso simétrico

Para $X \stackrel{d}{=} S_\alpha(1, \beta, 0)$ vamos denotar por $G(x; \alpha, \beta)$ sua função de distribuição e representaremos $\overline{G} = 1 - G$.

Teorema 4.2

Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy simétrico. Para números positivos u, c e λ nós temos

$$\begin{aligned} P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} &\leq 2P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\} \\ &= 2\overline{G}(u/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, 0). \end{aligned}$$

Caso não simétrico

Lema 4.2

Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com $\alpha \neq 1$ e parâmetro de desvio $|\beta| \leq 1$. Então para $z > 0$ temos

(i) $P\{Z_\alpha(t) > 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi\alpha} \arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) =: \rho$,

(ii) $P\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} Z_\alpha(s) \geq z\right\} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > z\}$.

Caso não simétrico

Teorema 4.3

Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com índice $\alpha \neq 1$ e $|\beta| \leq 1$. Para números positivos u, c e λ nós temos

$$\begin{aligned} P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} &\leq \left(\frac{1}{\rho}\right) P\{Z_\alpha(t) > u\lambda^{-1/\alpha}\} \\ &= \left(\frac{1}{\rho}\right) \overline{G}(u/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta). \end{aligned}$$

Caso não simétrico

Teorema 4.4

Seja Z_α um movimento α-estável de Lévy com índice $\alpha \neq 1$ e $|\beta| \leq 1$ ou $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Para números positivos u, c e λ nós temos

$$P\{T(u + cs - \lambda^{1/\alpha} Z_\alpha(s)) \leq t\} \leq \frac{\overline{G}((u+ct)/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta)}{\overline{G}(ct/(\lambda t)^{1/\alpha}; \alpha, \beta)}.$$

Divisibilidade Infinita

Definição

Dizemos que uma v.a. X tem distribuição infinitamente divisível se $\forall n \in \mathbb{N}$ existem v.a.'s $X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \cdots, X_n^{(n)}$ i.i.d's tais que

$$X \stackrel{d}{=} X_1^{(n)} + \cdots + X_n^{(n)}.$$

Definição Alternativa

Definição

Um processo $Z_\alpha(t)$ iniciado em 0, com incrementos independentes e estacionários, é dito Lévy α-estável se

$$Z_\alpha(1) \stackrel{d}{=} S_\alpha(\sigma, \beta, 0).$$

Essa definição é equivalente à Definição 1.4.