MAE 229 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Resolução Lista 5

Professor: Pedro Morettin e Profa. Chang Chian

Exercício 1

(a) De uma forma geral, o desvio padrão é usado para medir a dispersão dentro de uma amostra, assim, se desejamos verificar se uma operação varia muito, devemos usar a variância ou o desvio padrão da amostra para a constatação desse fato.

(b) Para este exercício, assumiremos um nível de confiança de $\gamma = 0,95$. Onze empregados foram amostrados segundo a tabela. Sabemos que $10 \cdot \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{10}$, em que $S^2 = 10,05$ é a variância amostral e σ^2 é a variância populacional. Neste contexto, o intervalo de confiança para σ^2 é da forma $IC(\sigma^2, 0.95) = \left(10\frac{S^2}{f_2}; 10\frac{S^2}{f_1}\right)$, em que $P(Z < f_1) = 0,025$ e $P(Z > f_2) = 0,025$ para $Z \sim \chi^2_{10}$. Como, $f_1 = 3,25$ e $f_2 = 20,48$, temos que $IC(\sigma^2, 0,95) = (4,91; 30,95)$.

Exercício 2

(a) Denotando por X a variável aleatória que representa a porcentagem da receita familiar gasta com alimentação, queremos estimar a porcentagem média μ. Neste caso, a estatística a ser utilizada é a média amostral $\bar{X}$. Sabemos que $E(\bar{X}) = \mu$ e $Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$, sendo $\sigma = Var(X)$ e n o tamanho da amostra. Supondo que X seja normalmente distribuída, um intervalo de confiança de 95% para $\bar{X}$ é:

$$IC(\mu; 95\%) =]\bar{X} - 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{X} + 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}[.$$

Note que neste caso não sabemos a variância populacional σ^2 e $n = 16$ não é um tamanho de amostra grande, portanto, usaremos a variância amostral S^2. É possível demonstrar que:

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1).$$

Assim, para a construção de intervalos de confiança com grau de confiança γ, temos:

$$P(-t_\gamma < T < t_\gamma) = \gamma,$$

$$IC(\bar{X};\gamma) = \bar{X} \pm t_\gamma \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Substituindo pelos valores observados $\bar{X} = 41,5625$, $S^2 = 107,0625$, $n = 16$ e $t_{95\%} = 1,7531$ (usando 15 graus de liberdade), encontramos o seguinte intervalo de confiança para a porcentagem média gasta com alimentação:

$$IC(\bar{X};95\%) =]37,0278;46,0972[.$$

(b) Na item anterior, ao utilizar a estatística $T \sim t(n-1)$, supomos que a população seja normalmente distribuída, de variância desconhecida.

Exercício 3

Desejamos testar, ao nível de significância $\alpha = 0,05$, a hipótese

$$H_0 : \sigma^2 = 25$$
$$H_1 : \sigma^2 > 25,$$

sabendo que temos $n = 11$ barras de ferro com média $\bar{x} = 263$ e $S^2 = 48$. Sabemos que $T = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ sob H_0. Então, a região crítica é da forma $]f, +\infty[$, em que $P(T > f) = 0,05$, ou seja, $f = 18,31$. Sob H_0, o valor da estatística T é 19,2. Como este valor pertence à região crítica, rejeitamos a hipótese nula e concluímos que as barras apresentam um desvio padrão maior que 5, ou seja, a afirmação do fabricante é falsa.

Exercício 4

Denotando por X o tempo de permanência em anos dos economistas recém formados no primeiro emprego, assume-se que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo ambos os parâmetros desconhecidos. Desejamos testar:

$$H_0 : \mu = 2$$
$$H_1 : \mu \neq 2.$$

Sabemos que a região crítica do teste é da forma $RC =]-\infty; -t_c[\cup]t_c; +\infty[$, em que $P(T > t_c) = \dfrac{\alpha}{2}$ e $T = \dfrac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$.

Para uma amostra de tamanho $n = 15$, observou-se que $\bar{X} = 2,7$ e $S = 1,4$. Usando o nível de significância $\alpha = 0,01$, temos que $t_c = 2,9768$ para 14 graus de liberdade. Sob H_0, temos que $T = 1,9365 \notin RC$. Assim, não rejeitamos H_0, e podemos concluir que $\mu = 2$ com base neste teste.

Exercício 5

Faremos o seguinte teste de aderência:

$$H_0 : p_1 = 0,656 \text{ e } p_2 = 0,093 \text{ e } p_3 = 0,093 \text{ e } p_4 = 0,158$$
$$H_1 : \text{Ou } p_1 \neq 0,656 \text{ ou } p_2 \neq 0,093 \text{ ou } p_3 \neq 0,093 \text{ ou } p_4 \neq 0,158$$

Em uma amostra de tamanho $n = 197$, foram observadas as seguintes frequências para os quatro animais: $O_1 = 125$, $O_2 = 18$, $O_3 = 20$ e $O_4 = 34$. A tabela abaixo resume as frequências esperadas e observadas. Note que a frequência esperada para o categoria i é $E_i = p_i \cdot 197,\ i = 1, 2, 3, 4$.

Frequência observada e Frequência esperada

	Categoria 1	Categoria 2	Categoria 3	Categoria 4
Frequência Esperada (E)	129,23	18,32	18,32	31,13
Frequência Observada (O)	125,00	18,00	20,00	34,00

Para esse teste usaremos a estatística

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

em que s é o número de classes (no caso quatro animais), O_i e E_i são as frequências observadas e esperadas de cada classe. Sabemos que $T \sim \chi^2(s-1)$ (no caso teremos apenas 3 graus de liberdade).

Para esses dados, a estatística $T = \dfrac{(125 - 129,23)^2}{129,23} + \dfrac{(18 - 18,32)^2}{18,32} + \dfrac{(20 - 18,32)^2}{18,32} + \dfrac{(31,13 - 34)^2}{31,13} = 0,564$.

A região crítica é da forma $]c, \infty[$ em que $P(T > c) = \alpha$. Como $T \sim \chi^2(3)$, e assumindo um nível de significância $\alpha = 0,05$, temos que a região crítica é $]7,82; \infty[$. Como $T = 0,564 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese nula, isto é, o modelo genético é adequado para os animais observados.

Exercício 6

Neste exercício faremos um teste de aderência para verificar se os dados são de fato de uma distribuição normal. Como não sabemos os parâmetros populacionais, vamos testar a hipótese de que a distribuição dos dados é $N(\bar{X}, S^2)$. Para esses dados, $\bar{X} = 27,75$ e $S^2 = 80,69$.

Calculamos os quartis teóricos usando os dados enunciados os quantis da normal padrão, dividindo os dados em quatro classes, cuja probabilidade de ocorrência é 0,25. Podemos notar que os valores esperados e observados são iguais.

Valores Observados e Esperados

Classes	$]-\infty; 21,69]$	$]21,69; 27,75]$	$]27,75; 33,80]$	$]33,80; +\infty[$	Total
O_i	6	6	1	7	20
E_i	5	5	5	5	20

Para esse exercício, teríamos que

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(1),$$

pois como não sabemos os parâmetros populacionais, ao invés de $T \sim \chi^2(s-1)$, sendo neste caso $s = 4$ classes, teríamos que $T \sim \chi^2(s-1-2)$, uma vez que perdemos dois graus de liberdade ao usar parâmetros estimados da amostra. Usando os dados da tabela acima, obtemos que $T = 4,4$. O valor crítico c tal que $P(\chi^2(1) > c) = 0,05$ é $c = 3,85$, logo rejeitamos a hipótese nula de que a distribuição é $N(27,75; 80,69)$.

Exercício 7

Desejamos testar

$$H_0 : X \sim \text{Poisson}(2,57)$$
$$H_1 : X \nsim \text{ Poisson } (2,57)$$

em que $\hat{\lambda} = \bar{X} = 2,57$ e X é o número de clientes que chegam ao banco num intervalo de um minuto. Na tabela a frequência observada e a frequência esperada de intervalos com i clientes, $i = 1, 2, 3, 5$ ou mais de 6 são mostrados. Os valores esperados são dados por $E_i = np_i = 70p_i$, onde $p_i = P(X = i), i = 0, 1, \ldots, 7$, segundo a distribuição de Poisson de parâmetro $2,57$.

Número de clientes	0	1	2	3	4	5	6	7
Frequência observada (O)	9	15	17	11	7	5	4	2
Frequência esperada (E)	5,4	18,6	12,9	15,2	10,2	4,6	2,2	0,9

Distribuição acumulada observada e distribuição esperada

Sabemos que

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \sim \chi^2(n-1-1), \text{ sob } H_0$$

em que $n = 8$ é o número de categorias na tabela. Note que retiramos um grau de liberdade adicional na distribuição da estatística, pois não conhecemos o parâmetros λ da população e usamos sua estimativa $\hat{\lambda} = \bar{X}$ no teste.

Como $T \sim \chi^2(6)$ sob H_0 , a região crítica é da forma $]f, \infty[$, em que $P(Z > f) = 0,05$ com $Z \sim \chi^2(6)$, assumindo um nível de significância $\alpha = 0,05$.

Ou seja, a região crítica é $]12,59; \infty[$. Como $T = 9,42$, não rejeitamos a hipótese nula, ou seja, o número de clientes que chegam na loja no intervalo de um minuto segue uma distribuição Poisson.

Exercício 8

Para esse exercício faremos um teste de homogeneidade para determinar se as duas populações (uma submetida ao método convencional e a outra ao método novo de ensino) são iguais, isto é, queremos testar:

$$H_0 : P_1 = P_2 = P$$

Para esse teste usaremos a estatística

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n^*_{ij})^2}{n^*_{ij}},$$

em que n_{ij} é o valor observado para a classe j, $j = 1, 2, .., s$ e população i, $i = 1, 2, .., r$ e n^*_{ij} é o valor esperado para a classe j e população i sob H_0, sendo $n^*_{ij} = \dfrac{n_{i.} n_{.j}}{n}$. Note que $n_{i.}$ é o total da linha i, $n_{.j}$ é o total da coluna j e n é o total geral, equivalente à soma do número de observações para todas as populações. Sob H_0, tem-se que $\chi^2 \sim \chi^2(v)$, sendo $v = (r-1)(s-1)$.

Para esse exercício, temos duas classes (Sucesso e Fracasso) e duas populações. As tabelas de frequências observadas e estimadas encontram-se abaixo:

Valores Observados

Método/ Resultado	Sucesso	Fracasso	Total
Convencional	33	17	50
Novo	37	13	50
Total	70	30	100

Valores Esperados

Método/ Resultado	Sucesso	Fracasso	Total
Convencional	35	15	50
Novo	35	15	50
Total	70	30	100

Sendo assim, temos que

$$\chi^2 = \frac{(33-35)^2}{35} + \frac{(37-35)^2}{35} + \frac{(17-15)^2}{15} + \frac{(13-15)^2}{15} = 0,7619$$

A região de rejeição do teste é tal que $P(\chi^2(1) > c) = \alpha$. (como trata-se de duas classes e duas populações, temos apenas $(2-1)(2-1) = 1$ grau de liberdade). Para o nível de significância $\alpha = 0,05$, temos que $c = 3,85$. Como $0,7619 < 3,85$, não rejeitamos H_0, concluindo que os métodos de ensino são equivalentes em termos de resultado.

Exercício 9

Desejamos fazer o seguinte teste de homogeneidade:

$$H_0 : \text{Droga A é igualmente eficaz à droga B}$$
$$H_0 : \text{Droga A não é igualmente eficaz à droga B.}$$

As frequências observadas e esperadas para cada uma das drogas são mostradas nas tabelas seguintes.

	Eficaz	Ineficaz	Total
Droga A	55	25	80
Droga B	48	32	80
Total	103	57	160

Frequência observada

	Eficaz	Ineficaz	Total
Droga A	51.50	28.50	80
Droga B	51.50	28.50	80
Total	103	57	160

Frequência esperada

Para esse teste usaremos a estatística

$$T = \sum_{i=1}^{s} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i},$$

em que s é o número de classes (no caso duas), O_i e E_i são as frequências observadas e esperadas de cada classe. Sabemos que $T \sim \chi^2(s-1)$ (no caso teremos apenas um grau de liberdade).

Para os dados em questão, observamos $T = \frac{(51,50-55)^2}{51,50} + \frac{(25-28,50)^2}{28,50} + \frac{(48-51,50)^2}{51,50} + \frac{(32-28,50)^2}{28,50} = 1,34$. A região crítica é da forma $]c, +\infty[$ em que $P(T > c) = 0,05$. Como $T \sim \chi^2(1)$, e assumindo um nível de significância de $\alpha = 0,05$, temos que a região crítica é $]3,85, +\infty[$. Como $T = 1,34 \notin RC$, não rejeitamos a hipótese nula, ou seja, concluímos que a eficácia das duas drogas são semelhantes.

Exercício 10

Para esse exercício faremos um teste de independência entre uso do hospital e sexo do segurado. A hipótese neste caso é:

$H_0 : p_{ij} = p_{i.}p_{.j}$, para todo par (i,j)
$H_1 : p_{ij} \neq p_{i.}p_{.j}$, para algum par (i,j).

em que p_{ij} é a probabilidade de um indivíduo ser classificado nas categorias i, $i = 1, ..., r$ e j, $j = 1, ..., s$, sendo que $p_{i.} = \sum_{i=1}^{s} p_{ij}$ e $p_{.j} = \sum_{j=1}^{r} p_{ij}$ são as probabilidades marginais.

Para esse teste usaremos a estatística

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \frac{(n_{ij} - n_{ij}^*)^2}{n_{ij}^*},$$

em que n_{ij} é o valor observado para as categorias i e j e n_{ij}^* é o respectivo valor esperado. Note que $n_{ij}^* = \frac{n_{i.}n_{.j}}{n}$, sendo $n_{i.}$ o total da linha i, $n_{.j}$ o total da coluna j e n o total geral, equivalente à soma do número de observações para todas as populações.

No caso em questão, temos $r = 2$ e $s = 2$. Portanto, sob H_0, temos que $\chi^2 \sim \chi^2(1)$. A região de rejeição é da forma $]c, +\infty[$, em que $P(\chi^2(1) > c) = \alpha$. Para $\alpha = 0,05$, temos que $c = 3,85$.

Os valores observados e esperados encontram-se abaixo.

Valores Observados

	Homens	Mulheres	Total
Usaram	100	150	250
Não Usaram	900	850	1750
Total	1000	1000	2000

Valores Esperados

	Homens	Mulheres	Total
Usaram	125	125	250
Não Usaram	875	875	1750
Total	1000	1000	2000

Usando os dados em questão, temos que $\chi^2 = 11,43 \in RC$. Portanto, rejeitamos H_0, concluindo que uso do hospital e gênero do segurado não são independentes.

Exercício 11

Desejamos testar

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

em que ρ é a correlação populacional entre as notas de estatística e metodologia estatística.

Sabemos que $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}} \sim t(n-2)$, em que r é a correlação amostral. Logo, a região crítica é da forma $]-\infty, f_1[\cup]f_2, +\infty[$ em que $P(T < f_1) = 0,025$ e $P(T > f_2) = 0,025$ com $T \sim t(n-2)$. Ou seja, a região crítica é $]-\infty; -2,23[\cup]2,23; \infty[$. Como $T = 2,37 \in RC$, rejeitamos a hipótese nula, ou seja, existe uma correlação entre as disciplinas estatística e metodologia estatística.

Para construir o intervalo de confiança vamos utilizar a estatística

$$\xi = \frac{1}{2} \cdot ln\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

que tem uma distribuição muito próxima de uma normal $N(\mu_\xi, \sigma_\xi^2)$ sendo $\mu_\xi = \dfrac{1}{2} \cdot ln\left(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\right)$ ou, de forma equivalente, $\rho = \dfrac{e^{2\mu_\xi} - 1}{e^{2\mu_\xi} + 1}$.

Considerando $\sigma_\xi^2 = 1/2$, vamos encontrar um intervalo de confiança para μ_ξ com nível de confiança $\gamma = 95\%$. Esse intervalo é tal que

$$P\left(\frac{\xi_1 - \mu_\xi}{\sqrt{1/2}} < \frac{\xi - \mu_\xi}{\sqrt{1/2}} < \frac{\xi_2 - \mu_\xi}{\sqrt{1/2}}\right) = 0,95$$

ou seja, $P(-1,96 < Z < 1,96) = 0,95$, com $Z \sim N(0,1)$. Logo o intervalo para μ_ξ é $IC(\mu_\xi; 0,95) = \xi \pm 1,96\sqrt{1/2}$.

Para esses dados, temos que $\xi = 0,694$, logo o intervalo de confiança para μ_ξ com $\gamma = 0,95$ é $IC(\mu_\xi; 0,95) =]-0,693; 2,08[$.

Agora considere a função $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ e perceba que $f(x)$ é uma função crescente (pois $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$) e $f(\mu_\xi) = \rho$.

Então, um intervalo de confiança para ρ com $\gamma = 0,95$ é $IC(\rho; 0,95) =]f(-0,69); f(2,08)[$, isto é, $IC(\rho, 0,95) =]-0,6; 0,97[$.

Exercício 12

Vamos proceder de forma semelhante ao Exercício 11, fazendo um teste para verificar se a correlação entre tempo e volume (ρ) é zero:

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

Sabemos que $T = r\sqrt{\dfrac{n-2}{1-r^2}} \sim t(n-2)$, em que r é a correlação amostral. Logo, considerando um nível de confiança de 95%, a região crítica é da forma $]-\infty, f_1[\cup]f_2, +\infty[$ em que $P(T < f_1) = 0,025$ e $P(Z > f_2) = 0,025$ com $T \sim t(n-2)$.

Ou seja, para esses dados, temos $T \sim t(7)$, e a região crítica é $]-\infty; -2,365[\cup]2,365; \infty[$. Verificamos nos dados que o coeficiente de correlação amostral é $r = 0,98$ e assim $T = 12,85 \in RC$. Logo, rejeitamos a hipótese nula, ou seja, existe uma correlação entre tempo de acondicionamento e volume de carga.

Exercício 13

(a) O coeficiente de correlação amostral é $r = 0,76$.

(b) Desejamos testar

$$H_0 : \rho = 0$$
$$H_1 : \rho \neq 0$$

em que ρ é a correlação populacional entre os salários do homem e da mulher. Sabemos que a estatística $T = r\sqrt{\dfrac{8}{1-r^2}} \sim t(8)$. Logo, a região crítica é da forma $]-\infty, f_1[\cup]f_2, \infty[$ em que $P(T < f_1) = 0,025$ e $P(T > f_2) = 0,025$ com $T \sim t_8$. Ou seja, a região crítica é $]-\infty; -2,306[\cup]2,306; \infty[$.

Como $T = 3,29 \in RC$, rejeitamos a hipótese nula, ou seja, há um correlação linear diferente de zero entre o salário dos cônjuges.

(c) Como visto no exercício 11, primeiro temos que ter um intervalo de confiança de 95% para $\mu_\xi = \dfrac{1}{2} \cdot ln\left(\dfrac{1+\rho}{1-\rho}\right)$, que é $IC(\mu_\xi; 0,95) = \xi \pm 1,96\sqrt{1/2}$.

Para esses dados, temos que $\xi = \dfrac{1}{2} \cdot ln\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right) = 0,993$ (usando o coeficiente correlação amostral estimado no item a), logo o intervalo de confiança para μ_ξ com $\gamma = 0,95$ é $IC(\mu_\xi; 0,95) =]-0,393; 2,379[$.

Então, utilizando a fórmula inversa para obter ρ, um intervalo de confiança para ρ com $\gamma = 0,95$ é $IC(\rho; 0,95) =]f(-0,39); f(2,38)[$, isto é, $IC(\rho, 0,95) =]-0,374; 0,983[$.