

MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
pam@ime.usp.br
<http://www.ime.usp.br/~pam>

Aula 9

23 de setembro de 2021

Sumário

- 1 Estimadores espectrais suavizados
- 2 Estimadores suavizados de covariâncias
- 3 Estimadores suavizados de periodogramas

Suavização

1. Vimos que o periodograma não é um bom estimador do espectro, dada a sua grande instabilidade. Veremos, agora, como podemos obter estimadores espectrais que têm propriedades melhores do que o periodograma. Usaremos dois métodos para obter estimadores mais estáveis, ambos conduzindo aos chamados estimadores espectrais suavizados.
2. Podemos fazer o processo de suavização no tempo e depois transformar para o domínio de frequências, obtendo os **estimadores suavizados de covariâncias**.
3. Ou, então, o processo de suavização é feito no próprio domínio de frequências e teremos os **estimadores suavizados de periodogramas**.
4. Em ambos os casos, obtemos estimadores que são assintoticamente não viesados e com variâncias que decrescem com o número de observações da série temporal.

Estimação da facv

- Como o espectro é definido por

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \gamma_{\tau}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \quad (1)$$

a idéia natural é substituir γ_{τ} por um estimador.

2. Suponha, então, que tenhamos observações X_1, \dots, X_T do processo estacionário X_t e estimamos γ_k por

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|k|} \{X_t - \bar{X}\} \{X_{t+|k|} - \bar{X}\}, & \text{se } |k| \leq T-1 \\ 0, & \text{se } |k| > T-1, \end{cases} \quad (2)$$

onde \bar{X} é a **média amostral**

$$\bar{X} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t.$$

Estimação da facv

1. Sem perda de generalidade, vamos supor que a média do processo seja zero, de modo que \bar{X} é omitida em (2) e obtemos

$$\begin{aligned}
 E\{c_k\} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|k|} E\{X_t X_{t+|k|}\} \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|k|} \gamma_k = \left(1 - \frac{|k|}{T}\right) \gamma_k,
 \end{aligned} \tag{3}$$

o que mostra que c_k é viesado.

2. Se, em (2), colocarmos $T - |k|$ no denominador, no lugar de T , obteremos um estimador não viesado de γ_k . Contudo, o estimador definido por (2) tem um erro quadrático médio menor que o estimador não viesado. De (3), vemos que c_k é assintoticamente não viesado.

Estimação da facv

1. Se a média do processo não for zero, não é difícil verificar, de (2), que

$$c_k = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-|k|} [X_t - \mu][X_{t+|k|} - \mu] - (1 - \frac{|k|}{T})(\bar{X} - \mu)^2, \quad (4)$$

de modo que

$$E\{c_k\} = (1 - \frac{|k|}{T})\gamma_k - (1 - \frac{|k|}{T})\text{Var}(\bar{X}). \quad (5)$$

2. Por outro lado (Morettin, 1979, p. 152),

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-T}^T (1 - \frac{|k|}{T})\gamma_k,$$

de modo que se a média do processo não for zero, vemos de (5) que o viés do estimador é acrescido de um termo de $O(T^{-1})$.

Periodograma suavizado

1. Estimando-se $f(\lambda)$ por

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda k} c_k, \quad (6)$$

é fácil notar que esse estimador coincide com $I^{(T)}(\lambda)$. Vamos usar (6) para obter estimadores mais estáveis do que o periodograma.

2. Observamos que

$$E\{I^{(T)}(\lambda)\} = (2\pi)^{-1} \sum_{\tau=-T+1}^{T-1} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) \gamma_{\tau} e^{-i\lambda\tau}. \quad (7)$$

3. Chamando

$$w(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T}, & \text{se } |\tau| \leq T-1 \\ 0, & \text{se } |\tau| > T-1, \end{cases} \quad (8)$$

vemos que (7) é a transformada de Fourier do produto $w(\tau)\gamma_{\tau}$.

Periodograma suavizado

1. Logo, temos

$$E\{I^{(T)}(\lambda)\} = \int_{-\pi}^{\pi} W(\alpha) f(\lambda - \alpha) d\alpha, \quad (9)$$

na qual $W(\lambda)$ é a transformada de Fourier de $w(\tau)$, dada por

$$W(\lambda) = T \left[\frac{\text{sen}(\pi T \lambda)}{\pi T \lambda} \right]^2. \quad (10)$$

2. A equação (9) nos diz que o periodograma tem um valor esperado que corresponde a “olhar o espectro através da janela $W(\lambda)$ ”. Como, para T grande, $W(\lambda)$ comporta-se como uma função delta de Dirac, (9) também nos diz que $I^{(T)}(\lambda)$ é assintoticamente não viesado.

Estimador de Bartlett

1. O procedimento de suavização foi introduzido por Bartlett, em 1953. Suponha que dividamos a série de T observações em K subséries de comprimentos $M = T/K$ e calculemos o periodograma $I_\ell^{(M)}(\lambda)$, $\ell = 1, \dots, K$, para cada subsérie.
2. Depois tomamos

$$\overline{I(\lambda)} = \frac{1}{K} \sum_{\ell=1}^K I_\ell^{(M)}(\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \quad (11)$$

que é chamado o **periodograma suavizado de Bartlett**, na frequência λ .

3. Pode-se provar que

$$E\{\overline{I(\lambda)}\} = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha) f(\lambda - \alpha) d\alpha, \quad (12)$$

em que $W_M(\lambda)$ é a função (10) com $T = M$, transformada de Fourier de $w_M(\tau)$, dada por (8), com T substituído por M , $M < T$.

4. Dizemos que $W_M(\lambda)$ é a **janela espectral de Bartlett**, a qual está ilustrada na Figura 1, enquanto $w_M(\lambda)$ é o **núcleo de Bartlett** (também chamado **lag window**).

Estimador de Bartlett

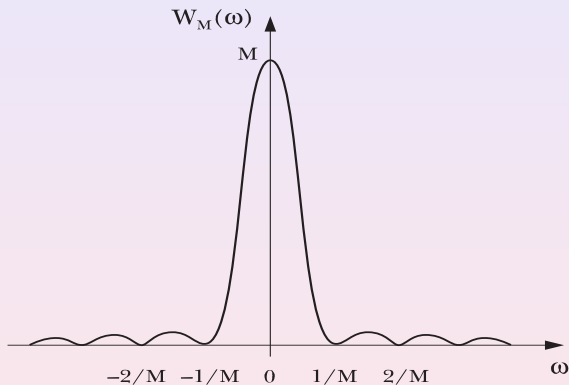


Figura 1: Janela espectral de Bartlett.

Estimadores suavizados de covariâncias

1. O procedimento acima sugere considerar estimadores espectrais da forma

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w_M(\tau) c_\tau e^{-i\lambda\tau}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \quad (13)$$

na qual, para um inteiro $M < T$, $w_M(\tau)$, $\tau = 0, \pm 1, \dots$, é uma sequência de pesos satisfazendo:

- (i) $0 \leq w_M(\tau) \leq w_M(0) = 1$
- (ii) $w_M(-\tau) = w_M(\tau)$, para todo τ
- (iii) $w_M(\tau) = 0$, $|\tau| > M$.

2. O estimador $\hat{f}(\lambda)$ é chamado **estimador suavizado de covariâncias**. (ESC). A **janela espectral** correspondente à função peso (núcleo) $w_M(\tau)$ é definida por

$$W_M(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} e^{-i\lambda\tau} w_M(\tau). \quad (14)$$

1. Segue-se que $W_M(\lambda)$ satisfaz:

- (i) $W_M(-\lambda) = W_M(\lambda)$, para todo λ ;
- (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) d\lambda = w_M(0) = 1$.

2. De (13), obtemos que $\hat{f}(\lambda)$ é a convolução das transformadas de Fourier de $w_M(\tau)$ e c_τ , isto é,

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) I^{(T)}(\alpha) d\alpha. \quad (15)$$

3. Tomando o valor esperado de (15), obtemos

$$\begin{aligned} E\{\hat{f}(\lambda)\} &= \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) E\{I^{(T)}(\alpha)\} d\alpha \\ &\approx \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) f(\alpha) d\alpha. \end{aligned} \quad (16)$$

1. Supondo a janela $W_M(\lambda)$ concentrada ao redor de $\lambda = 0$ e $f(\lambda)$ constante sobre todo intervalo de frequências de comprimento comparável com a largura do pico da janela, podemos escrever

$$E\{\hat{f}(\lambda)\} \approx f(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\alpha) d\alpha. \quad (17)$$

2. Sob essas mesmas condições, pode-se provar que

$$\text{Var}\{\hat{f}(\lambda)\} \approx \frac{2\pi}{T} f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha, \quad (18)$$

o que será feito adiante.

3. A relação (18) vem do fato que

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\hat{f}(\lambda_1), \hat{f}(\lambda_2)\} &\approx \\ &\approx \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda_1 - \alpha) [W_M(\lambda_2 - \alpha) + W_M(\lambda_2 + \alpha)] f^2(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (19)$$

que por sua vez é obtida de (15).

1. A relação (19) mostra que a covariância entre os estimadores espectrais suavizados de covariâncias depende da intersecção entre as janelas espectrais centradas em λ_1 e λ_2 .
2. Considere, agora, a integral (15) substituída por sua soma de Riemann:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{2\pi}{T} \sum_{\nu=-[(T-1)/2]}^{[T/2]} W_M(\lambda - \lambda_\nu) I_\nu^{(T)},$$

na qual λ_ν são as frequências de Fourier. Como $\frac{2\pi}{T} \sum_{\nu} W_M(\lambda_\nu) \approx \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda) d\lambda = 1$, temos que o estimador (15) é assintoticamente equivalente a

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{\nu=-[(T-1)/2]}^{[T/2]} W(\lambda - \lambda_\nu) I_\nu^{(T)}, \quad (20)$$

em que $W(\lambda)$ é uma função real, par, periódica e tal que

$$\sum_{\nu=-[(T-1)/2]}^{[T/2]} W(\lambda_\nu) = 1.$$

3. O estimador (20) é chamado **estimador suavizado de periodogramas**.

Estimador suavizado de periodogramas

- Um caso particular de (20) foi sugerido por Daniell, em 1946, e consiste em tomar a média de n ordenadas do periodograma ao redor da frequência de interesse. Se quisermos calcular $\tilde{f}(\lambda)$ em $\lambda_j = \frac{2\pi j}{T}$, considere, então,

$$\tilde{f}(\lambda_j) = \frac{1}{n} \sum_{\nu} I_{\nu}^{(T)}, \quad (21)$$

onde a soma é estendida aos índices ν de $j - [(n-1)/2]$ a $j + [n/2]$.

- Como $I_{\nu}^{(T)}$ é assintoticamente não viesado, temos que

$$E\{\tilde{f}(\lambda)\} \approx \sum_{\nu} W(\lambda - \lambda_{\nu}) f(\lambda_{\nu}). \quad (22)$$

1. Vejamos como obter a variância de $\tilde{f}(\lambda)$, que é assintoticamente a mesma que a variância de $\hat{f}(\lambda)$. Temos, de (20),

$$\text{Cov}\{\tilde{f}(\lambda_1), \tilde{f}(\lambda_2)\} = \sum_{r,s} W(\lambda_1 - \lambda_r)W(\lambda_2 - \lambda_s)\text{Cov}\{I_r^{(T)}, I_s^{(T)}\}, \quad (23)$$

na qual $\lambda_r = 2\pi r/T$, $\lambda_s = 2\pi s/T$.

3. Para T grande, as ordenadas do periodograma são não correlacionadas, logo,

$$\begin{aligned} \text{Cov}\{\tilde{f}(\lambda_1), \tilde{f}(\lambda_2)\} &= 2W(\lambda_1)W(\lambda_2)f^2(0) \\ &+ \sum_{r \neq 0, T/2} W(\lambda_1 - \omega_r)W(\lambda_2 - \omega_r)f^2(\omega_r) \\ &+ 2W(\lambda_1 - \pi)W(\lambda_2 - \pi)f^2(\pi), \end{aligned}$$

supondo T par. Para $\lambda_1 = \lambda_2$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\tilde{f}(\lambda)\} &= 2W^2(\lambda)f^2(0) + \\ &+ \sum_{r \neq 0, T/2} W^2(\lambda - \lambda_r)f^2(\lambda_r) + 2W^2(\lambda - \pi)f^2(\pi). \end{aligned}$$

1. Como $W(\lambda) \approx \frac{2\pi}{T} W_M(\lambda)$, substituindo as somas por integrais, obtemos

$$\begin{aligned} E\{\tilde{f}(\lambda)\} &= \frac{2\pi}{T} \sum_{\nu} W_M(\lambda - \lambda_{\nu}) f(\lambda_{\nu}) \\ &\approx \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda - \alpha) f(\alpha) d\alpha, \end{aligned} \quad (24)$$

que coincide com a equação (16).

2. Também,

$$\text{Cov}\{\tilde{f}(\lambda_1), \tilde{f}(\lambda_2)\} \approx \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W_M(\lambda_1 - \alpha) W_M(\lambda_2 - \alpha) f^2(\alpha) d\alpha, \quad (25)$$

para $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \pi$.

3. Para $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda)\} \approx \frac{2\pi}{T} \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda - \alpha) f^2(\alpha) d\alpha. \quad (26)$$

1. Observe que a expressão (25) é aproximadamente a mesma que (19), desprezando-se o termo que contém $W_M(\lambda_1 - \alpha)W_M(\lambda_2 + \alpha)$ em (19), que é pequeno quando comparado com $W_M(\lambda_1 - \alpha)W_M(\lambda_2 - \alpha)$.
2. Fazendo-se, agora, a suposição já mencionada antes (17), obtemos de (24) e (26) que

$$E\{\tilde{f}(\lambda)\} \approx f(\lambda), \quad (27)$$

$$\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda)\} \approx \frac{2\pi}{T} f^2(\lambda) \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha, \quad (28)$$

que são aquelas já mencionadas em (17) e (18) para $\hat{f}(\lambda)$. Das relações acima, podemos concluir que tais estimadores são consistentes.

Distribuição assintótica dos estimadores suavizados

- 1 Voltemos, agora, ao estimador suavizado (20), escrito na forma

$$\tilde{f}(\lambda_j) \approx \frac{2\pi}{T} \sum_{\nu} W_M(\lambda_j - \lambda_{\nu}) I_{\nu}^{(T)}, \quad (29)$$

para $-[(T-1)/2] \leq \nu \leq [T/2]$.

2. Se $f(\lambda)$ for quase constante na largura do pico principal de $W_M(\lambda)$, então

$$\tilde{f}(\lambda_j) \approx \frac{f(\lambda_j)\pi}{T} \sum_{\nu} W_M(\lambda_j - \lambda_{\nu}) U_{\nu}^{(T)}, \quad (30)$$

onde

$$U_{\nu}^{(T)} = \frac{I_{\nu}^{(T)}}{f(\lambda_j)/2} \quad (31)$$

tem distribuição $\chi^2(2)$

3. Logo, $\tilde{f}(\lambda_j)$ tem distribuição (para M e T grandes) que é uma combinação linear de variáveis $\chi^2(2)$ independentes. Como é difícil obter a distribuição dessa variável aleatória, usamos uma aproximação, supondo que $\tilde{f}(\lambda_j)$ tenha uma distribuição $c\chi^2(r)$, onde c e r são determinadas de modo que os dois primeiros momentos do estimador coincidam com os dois primeiros momentos da distribuição proposta.

Distribuição assintótica dos ES

1. Teremos, então,

$$E\{\tilde{f}(\lambda_j)\} = E\{c\chi^2(r)\} = cr, \quad (32)$$

$$\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\} = \text{Var}\{c\chi^2(r)\} = 2c^2r. \quad (33)$$

2.

$$c = \frac{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}{2E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}, \quad (34)$$

$$r = \frac{2[E\{\tilde{f}(\lambda_j)\}]^2}{\text{Var}\{\tilde{f}(\lambda_j)\}}. \quad (35)$$

3. O parâmetro r é chamado *número equivalente de graus de liberdade* do estimador. De (17) e (18), obtemos facilmente que

$$r = \frac{T}{\int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\alpha) d\alpha}, \quad (36)$$

$$c = \frac{f(\lambda_j)}{r}. \quad (37)$$

Distribuição assintótica dos ES

1. Como, assintoticamente, $(2\pi/T)W_M(\lambda) \approx W(\lambda)$, temos que

$$r = \frac{2}{\sum_{\nu} W^2(\lambda_{\nu})} \quad (38)$$

onde a soma é sobre os índices ν , com $-[(T-1)/2] \leq \nu \leq [T/2]$.

2. Concluimos, portanto, que $\tilde{f}(\lambda_j)$, ou $\hat{f}(\lambda_j)$, tem uma distribuição aproximada $[f(\lambda_j)/r]\chi^2(r)$, onde r é dado por (36) ou (38).
3. É possível construir estimadores que sejam consistentes e que tenham distribuição assintótica normal. Veja Brillinger (1981) para detalhes.

Intervalos de confiança

1. Vamos nos referir, no que segue, a $\tilde{f}(\lambda)$, mas os resultados aplicam-se, é claro, a $\hat{f}(\lambda)$.
2. Fixado um coeficiente de confiança γ , $0 < \gamma < 1$, podemos determinar os quantis $q(\alpha/2)$ e $q(1 - \alpha/2)$ da distribuição qui-quadrado com r graus de liberdade, com $\alpha = 1 - \gamma$, tais que

$$P\{q(\alpha/2) \leq \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{f(\lambda)} \leq q(1 - \alpha/2)\} \approx \gamma. \quad (39)$$

3. De (39), obtemos que $[r\tilde{f}(\lambda)/q(1 - \alpha/2), r\tilde{f}(\lambda)/q(\alpha/2)]$ é um intervalo de confiança para $f(\lambda)$, com coeficiente de confiança γ .
4. O comprimento desse intervalo é

$$L = \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{q(\alpha/2)} - \frac{r\tilde{f}(\lambda)}{q(1 - \alpha/2)} = r\tilde{f}(\lambda) \frac{q(1 - \alpha/2) - q(\alpha/2)}{q(\alpha/2)q(1 - \alpha/2)},$$

que depende de $\tilde{f}(\lambda)$, sendo, portanto, uma v.a.

Intervalos de confiança

1. Se quisermos o comprimento constante, basta usarmos logaritmos, obtendo-se

$$\log \frac{r}{q(1 - \alpha/2)} + \log \tilde{f}(\lambda) \leq \log f(\lambda) \leq \log \frac{r}{q(\alpha/2)} + \log \tilde{f}(\lambda), \quad (40)$$

que é o intervalo de confiança com coeficiente de confiança γ para $\log f(\lambda)$. O comprimento do intervalo é igual a $\log \frac{q(1-\alpha/2)}{q(\alpha/2)}$.

2. Normalmente, os estimadores espectrais são apresentados em gráficos com escala logarítmica no eixo das ordenadas, ou mesmo na escala decibel, que consiste em utilizar $10 \log_{10} \tilde{f}(\lambda)$ versus λ . Um intervalo de confiança para $\log_{10} f(\lambda)$ pode ser obtido a partir de (40).

Janelas espectrais

1. Usualmente, a janela (*lag window*) $w_M(\tau)$ é gerada por outra janela $w(u)$ por meio de

$$w_M(\tau) = w(\tau/M),$$

e $w(u)$ é uma função par, contínua no intervalo $[-1, 1]$, com $w(0) = 1$ e $w(u) = 0, |u| > 1$. Por exemplo, a janela de Bartlett dada em (10) seria gerada por $w(u) = 1 - |u|$, se $|u| \leq 1$.

2. Algumas janelas usadas na prática são dadas na Tabela 1. Nesta tabela, $h(n/N)$ faz o papel de $w_M(\tau)$ e, $H^{(N)}(t)$, o papel de $W_M(\lambda)$. Veremos que a escolha da janela é uma questão importante, mas não crucial. O fator chave é a escolha do parâmetro M , que está relacionado com o grau de concentração de $W_M(\lambda)$ ao redor do zero.
3. Várias medidas dessa **largura de faixa** (*bandwidth*) são usadas na literatura. A mais simples é a amplitude correspondente à metade da potência, sugerida por Press e Tukey (1956), dada por $b_W = \lambda_L - \lambda_U$, onde λ_L e λ_U são os primeiros λ positivo e negativo tais que $W_M(\lambda) = W_M(0)/2$.
4. Parzen (1961) sugeriu a medida

$$b_W = \frac{1}{W_M(0)} = \frac{2\pi}{\sum_{\tau} w_M(\tau)},$$

que é a largura de um retângulo com a mesma altura máxima e área de $W_M(\lambda)$.

Janelas espectrais

1. Para o estimador de Daniell, dado em (21),

$$W(\lambda_j) = \begin{cases} \frac{1}{n, \text{se } -[(n-1)/2] \leq j \leq [n/2],} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

a definição natural de largura de faixa é considerar o comprimento da base da janela retangular, ou seja, $b_W = 2\pi n/T$ em unidades de frequência.

2. Koopmans (1974) sugere considerar uma **largura de faixa equivalente** (LFE), substituindo a janela espectral do estimador geral por uma janela retangular, de modo que os dois primeiros momentos do estimador coincidam com os respectivos do estimador de Daniell. Isso é equivalente a igualar os respectivos graus de liberdade, ou seja, $r = 2n$.
3. Segue-se que a LFE do estimador suavizado de periodogramas será

$$LFE = \frac{2\pi n}{T} = \frac{\pi r}{T} = \frac{2\pi}{T \sum W^2(\lambda_j)},$$

ou

$$LFE = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda) d\lambda},$$

para o estimador suavizado de covariâncias.

Janelas espectrais

1. A expressão (28) dá a variância do estimador suavizado. Vamos escrevê-la numa forma que dependa do parâmetro M . Usando a relação de Parseval, obtemos

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} W_M^2(\lambda) d\lambda &= \sum_{\tau=-M}^M w^2(\tau/M) \\ &= M \sum_{\tau=-M}^M w^2(\tau/M) \frac{1}{M} \approx M \int_{-1}^1 w^2(u) du. \end{aligned}$$

2. Logo, a variância do estimador suavizado de covariâncias pode ser escrita, de (28),

$$\text{Var}\{\hat{f}(\lambda)\} \approx f^2(\lambda) c_w \frac{M}{T},$$

em que $c_w = \int_{-1}^1 w^2(u) du$. Portanto, essa variância só depende da janela usada por meio de c_w . Se supusermos que $T \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ with $M/T \rightarrow 0$, então o estimador suavizado de covariâncias é consistente (é assintoticamente não viesado e sua variância tende a zero).

Janelas espectrais

1. Pode-se ver que (veja a Figura 2, por exemplo), que a largura de faixa da janela espectral é inversamente proporcional a M , e assim a escolha de M terá reflexos no viés e variância do estimador.
2. O viés do estimador suavizado de covariâncias é dado por

$$B(\lambda) = E\{\hat{f}(\lambda)\} - f(\lambda)$$
$$\approx \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau} [w_M(\tau) - 1] \gamma_{\tau} e^{-i\lambda\tau},$$

usando as definições do estimador e do espectro verdadeiro.

3. Dessa expressão, podemos calcular expressões aproximadas para o viés do estimador, utilizando várias janelas. Veja Parzen (1961) para detalhes.
4. Por exemplo, que o viés do estimador usando a janela de Bartlett é da ordem $O(1/M)$, enquanto os vieses dos estimadores usando as janelas de Tukey e Parzen têm ordem $O(1/M^2)$. Também, para o mesmo valor de M , o viés do estimador de Parzen é maior do que o estimador de Tukey, mas o oposto ocorre com suas variâncias.

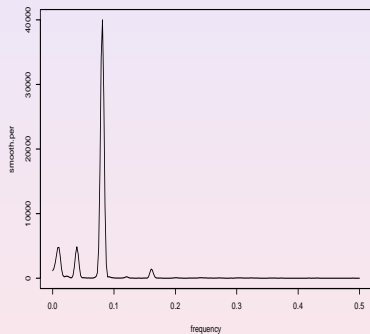
Janelas espectrais

1. As observações anteriores mostram que que o viés $B(\lambda)$ do estimador suavizado de covariâncias decresce com M crescendo, e sua variância decresce, com M decrescendo. Logo, não é possível que o viés e a variância diminuam simultaneamente. Em outras palavras, não é possível aumentar a resolução e a estabilidade do estimador ao mesmo tempo. Uma possibilidade é tentar minimizar o erro quadrático médio (EQM) do estimador, dado por

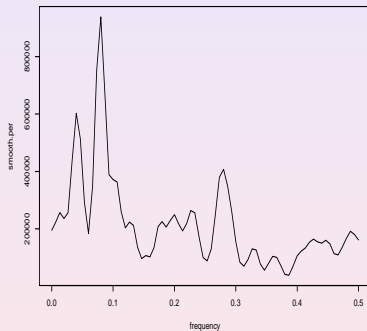
$$EQM[\hat{f}(\lambda)] = \text{Var}\{\hat{f}(\lambda)\} + B^2(\lambda).$$

2. **Exemplo 1.** A Figura 2 mostra os estimadores suavizados obtidos para as séries de marés de Ubatuba e de chuvas de Fortaleza, calculados usando o SPlus. Na Figura 3 mostramos o estimador suavizado para a série de Fortaleza, na escala decibel, com o intervalo de confiança indicado à direita, no gráfico. A legenda da figura mostra a largura de faixa (*bandwidth*) usada para o cálculo do estimador e do intervalo de confiança.

Exemplos de ES



(a)



(b)

Figure 2: Estimadores espectrais suavizados:
(a) Série de marés (Ubatuba); (b) Série de chuvas (Fortaleza).

Exemplos de ES

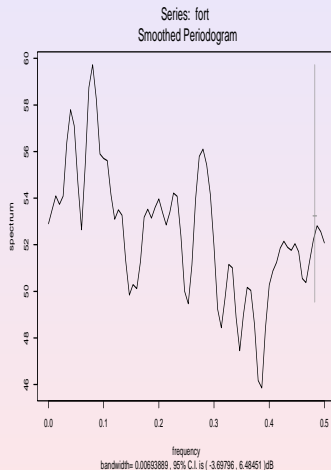
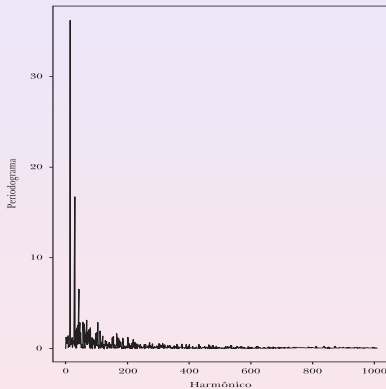


Figure 3: Estimador suavizado de periodograma para a série de chuvas, com intervalo de confiança indicado (escala decibel).

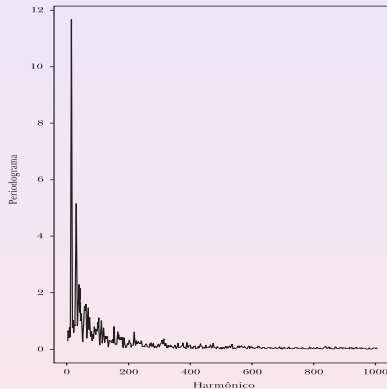
Exemplos de ES

1. **Exemplo 2.** Na Figura 4, temos o periodograma e um estimador suavizado para a série de sono-vigília. Vemos que em ambos há um pico correspondendo a um período de 24 horas. No periodograma, notamos a presença de dois outros picos, correspondentes a períodos de 12 e 8 horas, respectivamente.
2. **Exemplo 3.** Considere a série de manchas solares de Wolf. Na Figura 5, temos o periodograma e um estimador suavizado dessa série, mostrando o período aproximado de 11 anos

Exemplos ES



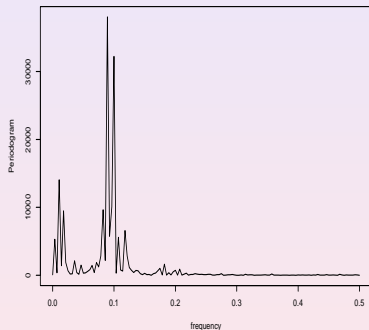
(a)



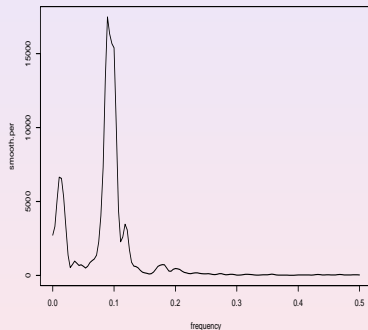
(b)

Figura 4: Série de sono-vigília de um menino.
(a) Periodograma; (b) Estimador suavizado.

Exemplos ES



(a)



(b)

Figura 5: Série de manchas solares de Wolf.
(a) Periodograma; (b) Estimador suavizado.

Referências

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloi, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. São Paulo: Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.

Yaglom, A. M. (1962). *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs: Prentice Hall