

# MAE 5871: Análise Espectral de Séries Temporais

Pedro A. Morettin

Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade de São Paulo  
pam@ime.usp.br  
<http://www.ime.usp.br/~pam>

## Aula 7

16 de setembro de 2021

# Sumário

- 1 Filtros lineares
- 2 Tipos de filtros
- 3 Exemplos de espectro

# Filtro linear

1. Uma das razões que tornam a análise espectral uma ferramenta analítica importante é o fato que o espectro fornece uma descrição simples do efeito da aplicação de uma transformação linear em um processo estacionário. O nome “filtro” vem da engenharia de comunicações, significando um mecanismo (na sua forma mais simples) que é composto de uma série de entrada  $Y(t)$ , uma série de saída  $X(t)$  e uma “operação”  $\mathcal{F}$  que permite que componentes da entrada, numa faixa de frequências, passem pelo mecanismo, sendo que as outras componentes sejam eliminadas ou atenuadas. Usaremos a notação

$$X = \mathcal{F}[Y]$$

ou

$$X(t) = \mathcal{F}[Y](t).$$

2. Dizemos que  $\mathcal{F}$  é **invariante no tempo** se o atraso (ou avanço) de  $Y(t)$  no tempo de  $\tau$  unidades implicar o atraso (ou avanço) em  $X(t)$  das mesmas  $\tau$  unidades, ou seja,  $\mathcal{F}[Y](t \pm \tau) = X(t \pm \tau)$ . Dizemos que  $\mathcal{F}$  é **linear** se para o conjunto de séries  $Y_1(t), \dots, Y_k(t)$  e constantes  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  temos

$$\mathcal{F} \left[ \sum_{j=1}^k \alpha_j Y_j \right] (t) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathcal{F}[Y_j](t).$$

3. Denominamos por **filtro linear** ou **sistema linear** qualquer operação  $\mathcal{F}$  que seja linear e invariante no tempo.

## Filtro convolução

1. Um caso especial importante de um filtro linear é o **filtro convolução**. Suponha que  $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$  seja dado por

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Y(t - \tau)d\tau, \quad (1)$$

na qual  $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$  é um processo estacionário, com média zero e f.a.c.v.  $\gamma_Y(\tau)$ .

2. Então  $X(t)$  é também estacionário, com média zero e f.a.c.v.

$$\gamma_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv. \quad (2)$$

3. Segue-se que o espectro de  $X(t)$  é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda\tau} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)h(v)\gamma_Y(\tau - v + u)dudv \right\} d\tau$$

supondo que  $\gamma(\tau)$  seja absolutamente integrável, e isso é verdadeiro desde que  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty$ .

## Filtro convolução

1. Efetuando a transformação  $w = \tau - v + u$ , obtemos

$$f_X(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{i\lambda u} du \int_{-\infty}^{\infty} h(v)e^{-i\lambda v} dv \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_Y(w)e^{-i\lambda w} dw.$$

2. Denotando

$$H(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)e^{-i\lambda u} du, \quad (3)$$

obtemos, finalmente,

$$f_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda). \quad (4)$$

3. A função  $H(\lambda)$  é a **função de transferência** do filtro convolução. A função  $h(u)$  é chamada **função resposta de impulso**. Vemos que (4) dá uma relação entre o espectro da série de entrada,  $Y(t)$ , e o espectro da série de saída,  $X(t)$ .

## Filtro convolução

1. Se  $Y_t$  e  $X_t$  são processos discretos, as relações correspondentes a (1) e (3) são

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k Y_{t-k}, \quad (5)$$

$$H(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\lambda k}, \quad (6)$$

respectivamente, com (4) permanecendo inalterada. A **condição de estabilidade** do filtro torna-se, agora,  $\sum_k |h_k| < \infty$ .

3. De modo geral, temos o seguinte resultado.

**Teorema 1.** *Se a condição (1) valer e  $F_Y(\lambda)$  é a função de distribuição espectral (f.d.e) de  $Y(t)$ , então a f.d.e de  $X(t)$  satisfaz*

$$dF_X(\lambda) = |H(\lambda)|^2 dF_Y(\lambda). \quad (7)$$

## Filtro convolução

1. No caso especial em que  $Y_t$  é ruído branco, a relação (1) torna-se um PLG e sua f.a.c.v. fica

$$\gamma_X(k) = \sigma^2 \sum_j h_j h_{j-|k|},$$

e

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_j h_j e^{-i\lambda j} \right|^2.$$

2. Para que o lado direito de (1) seja bem definido, isto é, a integral convirja em média quadrática, é necessário que  $X(t)$  tenha variância finita, ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(\lambda) d\lambda < \infty \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 f_Y(\lambda) d\lambda < \infty.$$

Uma condição suficiente para que esta seja satisfeita é que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(u)|^2 du < \infty,$$

se  $f_Y(\lambda) \leq M$ , para uma constante  $M$  e para todo  $\lambda$ .

# Ganho e fase

1. Em geral, a função de transferência do filtro,  $H(\lambda)$ , é complexa. Escrevendo-a em forma polar temos

$$H(\lambda) = G(\lambda)e^{i\theta(\lambda)}, \quad (8)$$

em que  $|H(\lambda)| = G(\lambda)$  é denominada **ganho** do filtro e  $\theta(\lambda) = \arg [H(\lambda)]$  é a **fase**.

2. **Exemplo 1.** Considere o filtro convolução dado por (1). Usando as representações espectrais das séries de entrada e de saída, temos que o termo  $\exp(i\lambda t)$  da série de entrada,  $Y(t)$ , tem amplitude  $|dZ_Y(\lambda)|$  e fase  $\arg \{dZ_Y(\lambda)\}$ , enquanto o termo  $\exp(it\lambda)$  da série filtrada,  $X(t)$ , tem amplitude

$$\begin{aligned} |dZ_X(\lambda)| &= |H(\lambda)| \cdot |dZ_Y(\lambda)| \\ &= G(\lambda) \cdot |dZ_Y(\lambda)| \end{aligned} \quad (9)$$

e fase

$$\begin{aligned} \arg \{dZ_X(\lambda)\} &= \arg \{H(\lambda) \cdot dZ_Y(\lambda)\} \\ &= \theta(\lambda) + \arg \{dZ_Y(\lambda)\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Analisando as expressões (9) and (10), podemos concluir que a amplitude da série de saída é multiplicada pelo ganho do filtro, e sua fase é adicionada pela quantidade  $\theta(\lambda)$ .

Para que  $\theta(\lambda) \equiv 0, \forall \lambda$ , ou seja, não haja mudança de fase,  $H(\lambda)$  deve ser real, e isso implica que  $h(u)$  seja uma função par, o que implicaria que o filtro fosse fisicamente não realizável ( $h(u) \neq 0, u < 0$ ). Na prática, a maioria dos filtros têm funções de transferência complexas e produzem mudanças de fase em algumas (ou todas as) frequências.



# Alguns tipos de filtros

## 1. Filtro passa-alto

Esse tipo de filtro elimina ou atenua componentes, na série de entrada, com frequências baixas. O quadrado do módulo da função de transferência é dado por

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \geq \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| < \lambda_0. \end{cases}$$

cujo gráfico está na Figura 1. Versões aproximadas desse filtro são usadas em amplificadores de áudio, de modo a suprimir distorções de baixa frequência.

## 2. Filtro passa-baixo

Nesse caso temos a supressão (ou atenuação) de componentes de alta frequência. Logo,

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_1, \end{cases}$$

e o gráfico está representado na Figura 2. Esse tipo de filtro também é usado em equipamentos de áudio para suprimir ruído de alta frequência.

## 3. Filtro passa-banda

Finalmente, para esse tipo de filtro, temos que

$$|H(\lambda)|^2 = \begin{cases} 1, & \lambda_0 \leq |\lambda| \leq \lambda_1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

representada na Figura 3.

# Tipos de filtros

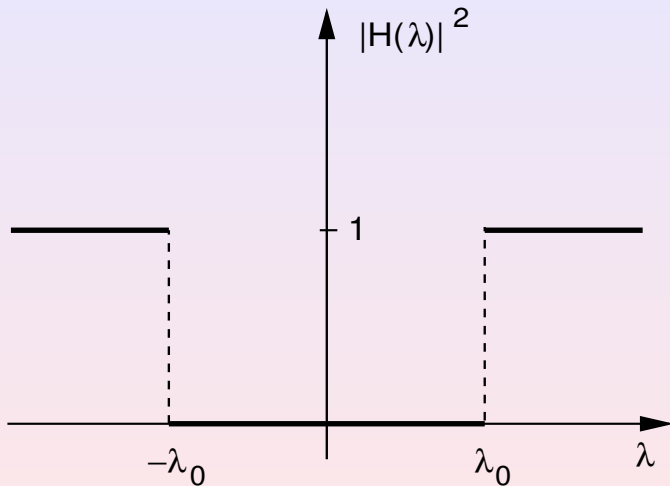


Figura 1: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro passa-alto.





## Exemplos

1. **Filtro diferença.** Nesse caso, temos que

$$X_t = (1 - B)Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

Aqui,  $h_0 = 1$ ,  $h_1 = -1$  e  $h_j = 0$ ,  $j \neq 0, 1$ . Essa função mostra que o filtro elimina componentes de baixa frequência (tendências) e é, aproximadamente, um filtro passa-alto. Ainda,

$$G(\lambda) = |H(\lambda)| = 2 \left| \sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|$$

e

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} (\pi - \lambda)/2, & \lambda > 0, \\ -(\pi - \lambda)/2, & \lambda < 0. \end{cases}$$

2. A função de transferência do filtro é dada por

$$H(\lambda) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} h_j e^{-i\lambda j} = 1 - e^{-i\lambda}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (11)$$

e, conseqüentemente,

$$|H(\lambda)|^2 = (1 - e^{-i\lambda})(1 - e^{i\lambda}) \quad (12)$$

$$= 2[1 - \cos(\lambda)], \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \quad (13)$$

representada na Figura 4.

3. Essa função mostra que o filtro elimina componentes de baixa frequência (tendências) e é, aproximadamente, um filtro passa-alto. Ainda,

$$G(\lambda) = |H(\lambda)| = 2 \left| \sin \left( \frac{\lambda}{2} \right) \right|$$

e

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} (\pi - \lambda)/2, & \lambda > 0, \\ -(\pi - \lambda)/2, & \lambda < 0. \end{cases}$$

## Exemplos

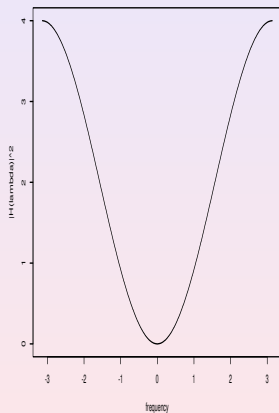


Figura 4: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro diferença.

## Exemplos

1. **Filtro diferença sazonal.** Suponha que o período sazonal seja 12; então, a relação entre entrada e saída é dada por

$$X_t = (1 - B^{12})Y_t = Y_t - Y_{t-12}.$$

Vemos que  $h_0 = 1$ ,  $h_{12} = -1$  e  $h_j = 0$ ,  $j \neq 0, 12$ .

2. A função de transferência é dada por

$$H(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-i\lambda k} = 1 - \exp(-12i\lambda), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi \quad (14)$$

e

$$|H^2(\lambda)| = |1 - \exp(-12i\lambda)|^2 = 2 - 2 \cos(12\lambda) \quad (15)$$

$$= 2(1 - \cos(12\lambda)), \quad (16)$$

representada na Figura 5. Esta indica que o filtro suprime frequências sazonais e suas harmônicas.

## Exemplos

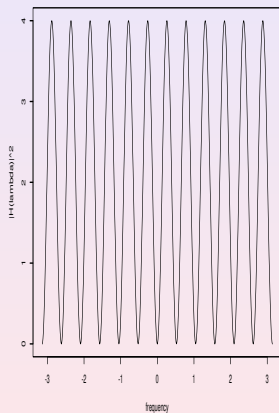


Figura 5: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro diferença sazonal de ordem 12.



## Exemplos

1. **Filtro de médias móveis simétrico.** Esse filtro é comumente usado para suavizar uma série temporal. Considere

$$X_t = \frac{1}{m} \sum_{j=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} Y_{t-j}, \quad m \text{ ímpar.}$$

2. Aqui,  $H(\lambda) = (\sin(\lambda m/2))/(\lambda \sin(\lambda/2))$  e, conseqüentemente,

$$G(\lambda) = H(\lambda)$$

e

$$\theta(\lambda) = \begin{cases} 0, & \text{se } \sin(\lambda m/2) \geq 0, \\ \pm\pi, & \text{se } \sin(\lambda m/2) < 0. \end{cases}$$

3. O quadrado do módulo da função de transferência, com  $m = 5$ , está representado na Figura 6, indicando que o filtro de médias móveis é um filtro passa-baixo, ou seja, reduz a variabilidade (ruído) da série.

## Exemplos

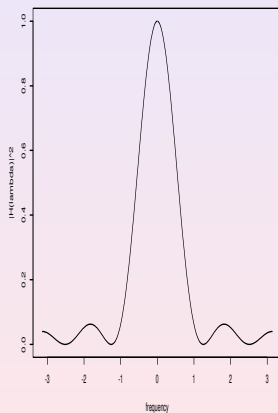


Figura 6: Quadrado do módulo da função de transferência de um filtro de médias móveis simétrico, com  $m = 5$ .

# Filtros sequenciais

1. Considere a aplicação sequencial de dois filtros,  $\mathcal{F}_1$  e  $\mathcal{F}_2$ , a uma série de entrada,  $Y(t)$ , isto é,

$$X(t) = \mathcal{F}[Y(t)] = \mathcal{F}_2[\mathcal{F}_1[Y(t)]].$$

2. Pode ser facilmente provado que a função de transferência do filtro  $\mathcal{F}$  é dada por

$$H(\lambda) = H_2(\lambda) \cdot H_1(\lambda), \quad (17)$$

na qual  $H_j(\lambda)$  é a função de transferência do filtro  $\mathcal{F}_j$ ,  $j = 1, 2$

3. Além disso, usando (4) e (17), encontramos que a função de densidade espectral da série de saída é dada por

$$f_X(\lambda) = |H_2(\lambda)|^2 |H_1(\lambda)|^2 f_Y(\lambda). \quad (18)$$

4. Esses resultados podem ser generalizados para uma aplicação sequencial de  $K$  filtros,  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_K$ , obtendo-se

$$H(\lambda) = \prod_{j=1}^K H_j(\lambda)$$

e

$$f_X(\lambda) = f_Y(\lambda) \prod_{j=1}^K |H_j(\lambda)|^2.$$

## Filtros sequenciais

1. Considere a aplicação sequencial dos filtros diferença e diferença sazonal de ordem 12, ou seja,

$$X_t = (1 - B)(1 - B^{12})Y_t.$$

2. Nesse caso,  $\mathcal{F}_1 = (1 - B)$  and  $\mathcal{F}_2 = (1 - B^{12})$ . Usando as expressões (17) e (18), temos que

$$H(\lambda) = (1 - e^{-i\lambda})(1 - \exp(-12i\lambda)), \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi$$

da qual segue

$$f_X(\lambda) = 4(1 - \cos(\lambda))(1 - \cos(12\lambda))f_Y(\lambda).$$

3. O quadrado do módulo de  $|H(\lambda)|^2$  está representada na Figura 7, indicando que esse filtro atenua componentes de baixa frequência (tendências) e frequências correspondendo ao período sazonal (12) e suas frações. Para mais detalhes, veja Priestley (1981).

## Filtros sequenciais

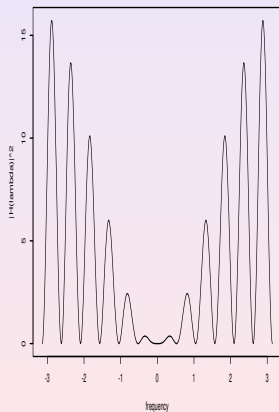


Figura 7: Quadrado do módulo da função de transferência do filtro sequencial diferença-diferença sazonal.

## Ruído branco discreto

1. Considere o processo  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ , o ruído branco discreto. A partir de sua f.a.c.v obtemos

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (19)$$

2. Segue-se que o ruído branco discreto tem um espectro constante no intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Em outras palavras, a potência total está uniformemente distribuída sobre todas as frequências desse intervalo.

## Espectro de AR(1)

1. Considere o processo AR(1),  $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ , com  $\varepsilon_t \sim \text{RB}(0, \sigma_\varepsilon^2)$  e  $|\phi| < 1$ .
2. A f.a.c.v. é dada por

$$\gamma_\tau = \begin{cases} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2}, & \text{se } \tau = 0, \\ \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \phi^{|\tau|}, & \text{se } |\tau| > 1, \end{cases}$$

logo

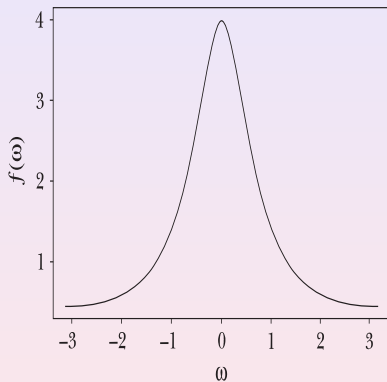
$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left( 1 + \sum_{\tau=1}^{\infty} \phi^\tau e^{-i\lambda\tau} + \sum_{\tau=1}^{\infty} \phi^\tau e^{i\lambda\tau} \right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1-\phi^2)} \left( 1 + \frac{\phi e^{-i\lambda}}{1-\phi e^{-i\lambda}} + \frac{\phi e^{i\lambda}}{1-\phi e^{i\lambda}} \right) \\ &= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1-\phi e^{-i\lambda}|^2}. \end{aligned}$$

3. Escrevendo de outra forma,

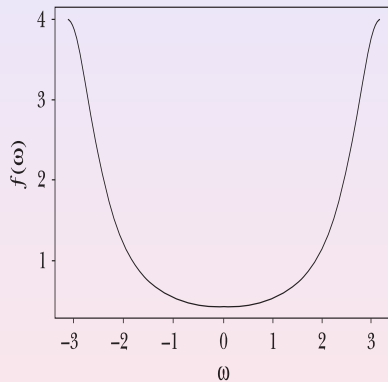
$$f(\lambda) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi(1 + \phi^2 - 2\phi \cos(\lambda))}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi.$$

A Figura 8 mostra o gráfico do espectro  $f(\lambda)$  para  $\phi = 0.5$  e  $\phi = -0.5$ , com  $\sigma_\varepsilon^2 = 1$ .

## Espectro de AR(1)



$$\phi = 0.5$$



$$\phi = -0.5$$

Figura 8: Espectro de um processo AR(1).



## Espectro de AR(p)

1. Considere, agora, um processo AR(p), com  $\mu = 0$ . Podemos considerar  $\varepsilon_t$  como a saída de um filtro linear com entrada  $X_t$  e função de transferência

$$H(\lambda) = \phi(e^{-i\lambda}) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j}. \quad (20)$$

2. Logo,

$$\frac{\sigma^2}{2\pi} = \left| 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j} \right|^2 f_X(\lambda),$$

da qual segue que o espectro de um processo AR(p) é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j} \right|^{-2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (21)$$

3. Na Figura 9 mostramos o espectro de um processo AR(2) com  $\phi_1 = 1,5$  e  $\phi_2 = -0,92$ , que apresenta um pico, indicando um comportamento pseudo periódico da série.

## Espectro de um AR(2)

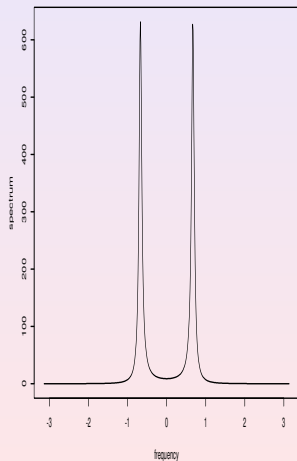


Figure 9: Espectro de um processo AR(2).

## Espectro de MA(q)

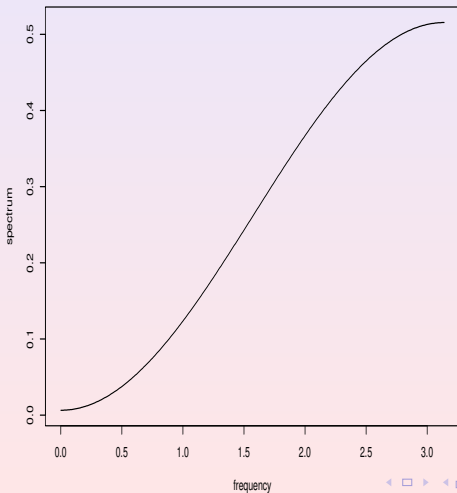
Considere o processo de médias móveis de ordem  $q$ , MA( $q$ ). Este é um caso particular de (5) logo por (7) vemos que o espectro de tal processo é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \left| \sum_{j=0}^q h_j e^{-i\lambda j} \right|^2, \quad (22)$$

com  $h_0 = 1$  e  $h_j = -\theta_j, j = 1, \dots, q$ .

Na Figura 10 temos um gráfico do espectro de um process MA(1) com  $\theta = 0,8$ .

# Espectro de um MA(1)



## Espectro de ARMA(p,q)

O processo ARMA(p,q) pode escrito na forma  $\phi(B)X_t = \theta(B)\varepsilon_t$ , ou seja, um filtro linear com função de transferência  $H(\lambda) = \theta(e^{-i\lambda})/\phi(e^{-i\lambda})$ .

Portanto, o espectro desse processo é dado por

$$f_X(\lambda) = \frac{\sigma^2 |1 - \sum_{j=1}^q \theta_j e^{-i\lambda j}|^2}{2\pi |1 - \sum_{j=1}^p \phi_j e^{-i\lambda j}|^2}, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi. \quad (23)$$

Dizemos que um processo ARMA genérico tem **espectro racional**, pois (23) é a razão de dois polinômios em  $\lambda$ .

# Processo harmônico

1. Vamos retomar o processo

$$X(t) = \sum_{j=1}^J A_j \cos(\lambda_j t + \phi_j), \quad (24)$$

no qual  $A_j, \lambda_j, j = 1, \dots, J$ , são constantes reais e  $\phi_j, j = 1, \dots, J$ , são v.a's independentes, uniformemente distribuídas no intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

2. Segue-se que a f.a.c.v desse processo é dada por

$$\gamma(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J A_j^2 \cos(\lambda_j \tau). \quad (25)$$

3. Vemos que  $\gamma(\tau)$  não é absolutamente integrável, e não podemos usar a definição usual de espectro. Considere, para efeito de simplicidade, o caso  $J = 1$ ,  $\lambda_1 = \lambda$ ,  $A_1 = A$  e calculemos

$$\begin{aligned} f_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \cos(\omega\tau) \gamma(\tau) d\tau = \frac{1}{4\pi} A^2 \int_0^T \cos(\omega\tau) \cos(\lambda\tau) d\tau \\ &= \frac{A^2}{8\pi} \int_0^T \frac{1}{2} \{ \cos(\omega + \lambda)\tau + \cos(\omega - \lambda)\tau \} d\tau \end{aligned}$$

## Processo harmônico

1. Aqui,

$$\delta_T(\alpha) = \frac{1}{4\pi} \frac{\sin(T\alpha)}{\alpha}$$

é um núcleo de Dirac e portanto satisfaz  $\delta_T(\alpha) \geq 0$  e  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(\alpha) d\alpha = 1$ .

2. Como

$$\delta_T(\alpha) = \frac{T}{4\pi} \frac{\sin(T\alpha)}{T\alpha} = O(T),$$

quando  $T \rightarrow \infty$ , vemos que para  $T$  grande,  $\delta_T(\alpha)$  comporta-se como uma função delta de Dirac.

3. Logo

$$f(\omega) = \frac{A^2}{4} \{\delta(\omega + \lambda) + \delta(\omega - \lambda)\}. \quad (26)$$

## Processo harmônico

1. Observe que podemos escrever

$$\gamma(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} dF(\omega),$$

com

$$F(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } -\pi < \omega < -\lambda \\ A^2/4, & \text{se } -\lambda \leq \omega < \lambda \\ A^2, & \text{se } \lambda \leq \omega \leq \pi. \end{cases}$$

2. Veja a Figura 11.



# Processo harmônico

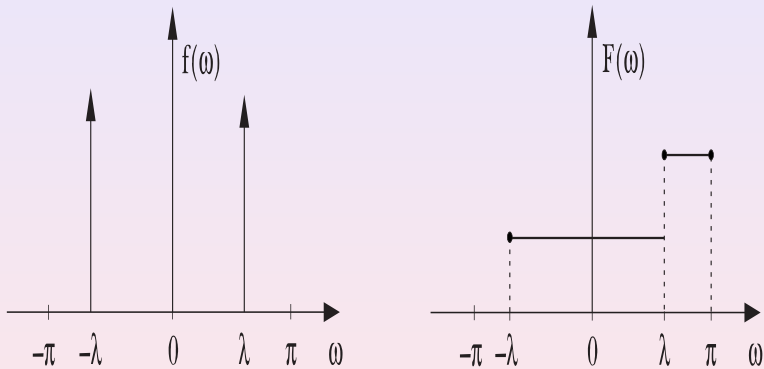


Figura 11: Espectro de um processo harmônico.

## Referências

Morettin, P. A. (2014). *Ondas e Ondaletas*. Segunda edição. São Paulo: EDUSP.

Morettin, P. A. and Toloí, C. M. C. (2018). *Análise de Séries Temporais*. Terceira Edição. São Paulo: Blucher.

Percival, D. and Walden, A. (1993). *Spectral Analysis for Physical Applications*. Cambridge.

Yaglom, A. M. (1962). *An Introduction to the Theory of Stationary Random Functions*. Englewood Cliffs: Prentice Hall